Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática e Estatística – IME
Professor: Jones Colombo

Gabarito da P2 de Álgebra Linear II

04/07/2017

---

1. $[2,0pts]$ Seja V o espaço das matrizes 4×4 sobre os reais munido com o produto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(B^t A)$. Encontre o complemento ortogonal do subespaço das matrizes diagonais.

   Solução: Sejam W o subespaço vetorial de todas as matrizes diagonais. Considere os vetores

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   que formam uma base para W.

   Seja $B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$ uma matriz que esta no complemento ortogonal de W e por isso, deve ser ortogonal a todos os vetores da base de W. Mas calculando os produtos internos obtemos

$$\langle B, A_1\rangle = \operatorname{tr}(A_1.B) = \operatorname{tr}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = a_1$$
$$\langle B, A_2\rangle = \operatorname{tr}(A_2.B) = b_2$$
$$\langle B, A_3\rangle = \operatorname{tr}(A_3.B) = c_3$$
$$\langle B, A_4\rangle = \operatorname{tr}(A_4.B) = d_4$$

   Portanto, $W^\perp$ é formado por todas as matrizes que tem todas as entradas da diagonal principal nula, isto é, matrizes da forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & 0 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & 0 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

---

2. $[3,0pts]$ Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, x + 2y + z, -x + z, -x - z).$$

a) [0,6] Encontre uma base para $W = \mathrm{Im}(T)$ (a imagem de T).

b) [1,2] Seja $v = (19, -3, -6, 2)$. Encontre $u \in W$ que esta a menor distância de v.

c) [0,6] Resolva o sistema $T(x, y, z) = u$.

d) [0,6] Se $v' = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Calcule $\mathrm{proj}_W\, v'$.

Solução: a) Veja que

$$(x+2y+3z, x+2y+z, -x+z, -x-z) = x(1,1,-1,-1)+y(2,2,0,0)+z(3,1,1,-1)$$

Vemos que a W é gerado pelas combinações destes 3 vetores, para vermos que estes 3 vetores precisamos escalonar uma matriz colocando estes vetores nas linhas de uma matriz,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto são linearmente independentes.

Logo $W = \mathrm{span}\{(1, 1, -1, -1), (2, 2, 0, 0), (3, 1, 1, -1)\}$

b) Precisamos calcular o operador de projeção ortogonal sobre W, para isso vamos calcular uma base ortogonal a partir destes vetores, mas isso é feito aplicando o procedimento de Gram-Schmidt, logo,

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 1, -1, -1) \\ u_2 &= (2, 2, 0, 0) - \mathrm{proj}_{u_1}(2, 2, 0, 0) = (1, 1, 1, 1) \\ u_3 &= (3, 1, 1, -1) - \big(\mathrm{proj}_{u_1}(3, 1, 1, -1) + \mathrm{proj}_{u_2}(3, 1, 1, -1)\big) = (1, -1, 1, -1). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathrm{proj}_W(19, -3, -6, 2) &= \mathrm{proj}_{u_1}(19, -3, -6, 2) + \mathrm{proj}_{u_2}(19, -3, -6, 2) + \mathrm{proj}_{u_3}(19, -3, -6, 2) \\ &= (5, 5, -5, -5) + (3, 3, 3, 3) + \left(\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{7}{2}\right) \\ &= \left(\frac{23}{2}, \frac{9}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{11}{2}\right). \end{aligned}$$

c) Para simplificar vamos resolver o sistema de forma geral, isto é, precisamos escalonar o sistema

$$c\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ -1 & 0 & 1 & z \\ -1 & 0 & -1 & t \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & 0 & -2 & y-x \\ 0 & 2 & 4 & x+z \\ 0 & 2 & 2 & t+x \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & 2 & 2 & t+x \\ 0 & 2 & 4 & x+z \\ 0 & 0 & -2 & y-x \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & 2 & 2 & t+x \\ 0 & 0 & 2 & z-t \\ 0 & 0 & 0 & -t-x+y+z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 2 & 0 & 2t+x-z \\ 0 & 0 & 2 & z-t \\ 0 & 0 & 0 & -t-x+y+z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -t-z \\ 0 & 2 & 0 & 2t+x-z \\ 0 & 0 & 2 & z-t \\ 0 & 0 & 0 & -t-x+y+z \end{bmatrix}$$

Substituindo (x, y, z, t) por $\left(\frac{23}{2}, \frac{9}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{11}{2}\right)$ obtemos $(x, y, z) = \left(2, -\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

d) a fórmula geral para a projeção e dada por

$$\text{proj}_W(x, y, z, t) = \frac{1}{4}\left(-t + 3x + y + z, t + x + 3y - z, t + x - y + 3z, 3t - x + y + z\right).$$

---

3. $[2, 0pts]$ Identifique a quádrica abaixo e determine as direções de seus eixos

$$x^2 - 10xy + y^2 - 10x + 2y + 13 = 0.$$

Solução: Vamos iniciar reescrevendo a equação na forma de matrizes

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

precisamos diagonalizar a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$, o polinômio característico é $\Delta_A(x) = x^2 - 2x - 24 = (x - 6)(x + 4) = 0$. Para o autovalor $x = 6$, vamos determinar $\mathrm{N}\,(A - 6I)$.

$$A - 6I = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix},$$

vemos que uma linha é multipla da outra, então ao escalonar este sistema rapidamente obtemos a equação $-x - y = 0 \Leftrightarrow x = -y$, e disto sabemos que um vetor típico do $\mathrm{N}\,(A - 6I)$ é do tipo $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Utilizando a informação do teorema espectral sabemos que o autovetor associado ao autovalor -4 é $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Considere $\alpha = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ e β a base canônica. Logo se $P = [I]_\alpha^\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, temos que

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}_\alpha = P \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_\beta.$$

Fazendo a mudança de coordenadas temos

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6\sqrt{2} & -4\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

Completando quadrado obtemos

$$6x'^2 - 6\sqrt{2}x' - 4y'^2 - 4\sqrt{2}y' + 13 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$6\left(x'^2 - \sqrt{2}x' + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\right) - 4\left(y'^2 + \sqrt{2}y' + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\right) = -13.$$

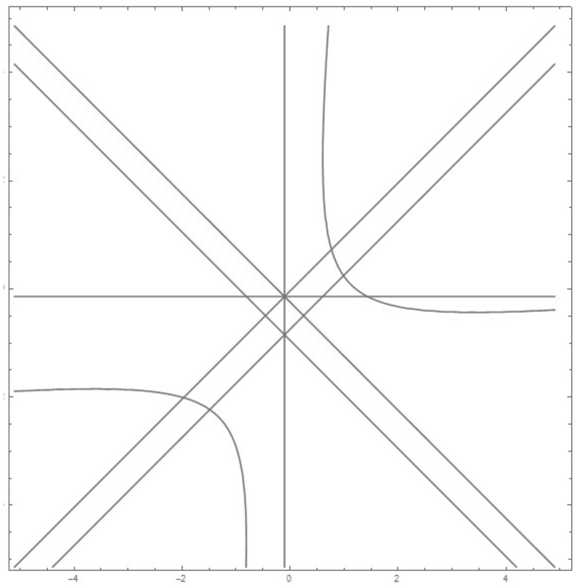
Obtemos

$$6\left(x' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4\left(y' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = -13 + 3 - 2 = -12.$$

Fazendo a mudança de coordenadas $x'' = x' - \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $y'' = y' + \frac{1}{\sqrt{2}}$ a equação torna-se

$$6x''^2 - 4y''^2 = -12 \Leftrightarrow -\frac{x''^2}{2} + \frac{y''^2}{3} = 1.$$

Fazendo os gráficos obtemos



---

4. $[1,5pts]$ Seja $u = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \in \mathbb{R}^2$ calcule a matriz da projeção ortogonal proj_u na base canônica e depois a matriz de $H_u = I - 2\operatorname{proj}_u$. Sem fazer contas, você sabe quais são os autovalores e autovetores de H_u?

   Solução: Calculando a projeção obtemos

$$\operatorname{proj}_u(x,y) = \left(\cos^2\theta x + \cos\theta\operatorname{sen}\theta y, \cos\theta\operatorname{sen}\theta x + \operatorname{sen}^2\theta y\right)$$

   Portanto, a matriz na base canônica deste operador fica

$$\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta\operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix}$$

   E a matrix de H_u na base canônica fica

$$I - 2\operatorname{proj}_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta\operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos 2\theta & -\operatorname{sen} 2\theta \\ -\operatorname{sen} 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

   Observe que esta matriz é de um operador ortogonal e que $\det(I - 2\operatorname{proj}_u) = -1$, portanto, esta matriz representa uma reflexão, logo os autovalores são 1 e -1. Além disso, H_u é construído para ser uma reflexão em torno da reta perpendicular a reta determinada pelo vetor $u = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Portanto, associado ao autovalor -1 temos o autovetor u e associado ao autovalor 1 temos o vetor $(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$.
