Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática
Gabarito da P2 de Álgebra Linear - GAN00140

04/07/2017

---

1. $[2,5pts]$ Verifique que a matriz $(I-A)(I+A)^{-1}$ é ortogonal, se $A = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$.

   Solução: Veja que

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -12 & 5 \\ -5 & -12 \end{bmatrix}.$$

   Veja que

$$B^t B = \left(\frac{1}{13}\right)^2 \begin{bmatrix} -12 & -5 \\ 5 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 & 5 \\ -5 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Portanto, B é ortogonal.

---

2. $[2,5pts]$ Considere o operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dado por $(x, y) \mapsto (x - y, 4x + 5y)$, faça o estudo do operador e obtenha uma base onde o operador fique na forma de Jordan. Se os autovalores forem valores complexos, encontre uma base onde o operador fique em uma forma que você pode explicar o que ele faz do ponto de vista geométrico.

   Solução: A matriz na base canônica do operador T é

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

   O polinômio característico $\Delta_A(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$, portanto temos um autovalor repetido. Claramente o polinômio $x - 3$ não anula A. Portanto, o polinômio mínimo é igual ao característico. Este operador não é diagonalizável. Para determinar uma base de vetores em que o operador fica na forma de Jordan precisamos determinar o autovetor associado ao autovalor 3.

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

   Claramente a segunda linha é obtida por multiplicar a primeira por -2. Daí o autovalor é uma solução de $-2x - y = 0$ que é $(1, -2)$. Para encontrar uma base em que o operador fica na forma de Jordan devemos escolher um vetor que não esta nesta direção, vamos fazer isto tomando o vetor $e_1 = (1, 0)$. Seja $\alpha = \{(A - 3I)_1, e_1\} = \{(-2, 4), (1, 0)\}$ e com respeito a esta base a matriz deste operador é

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

que é a forma de Jordan deste operador.

---

3. $[3, 0pts]$ Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, x + 2y + z, -x + z, -x - z).$$

a) [0,6] Encontre uma base para $W = \text{Im}(T)$ (a imagem de T).

b) [1,2] Seja $v = (19, -3, -6, 2)$. Encontre $u \in W$ que esta a menor distância de v.

c) [0,6] Resolva o sistema $T(x, y, z) = u$.

d) [0,6] Se $v' = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Calcule $\text{proj}_W v'$.

Solução:

a) Veja que

$$(x + 2y + 3z, x + 2y + z, -x + z, -x - z) = x(1, 1, -1, -1) + y(2, 2, 0, 0) + z(3, 1, 1, -1)$$

Vemos que a W é gerado pelas combinações destes 3 vetores, para vermos que estes 3 vetores precisamos escalonar uma matriz colocando estes vetores nas linhas de uma matriz,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto são linearmente independentes.

Logo $W = \text{Span}\,\{(1, 1, -1, -1), (2, 2, 0, 0), (3, 1, 1, -1)\}$

b) Precisamos calcular o operador de projeção ortogonal sobre W, para isso vamos calcular uma base ortogonal a partir destes vetores, mas isso é feito aplicando o procedimento de Gram-Schmidt, logo,

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 1, -1, -1) \\ u_2 &= (2, 2, 0, 0) - \text{proj}_{u_1}(2, 2, 0, 0) = (1, 1, 1, 1) \\ u_3 &= (3, 1, 1, -1) - \big(\text{proj}_{u_1}(3, 1, 1, -1) + \text{proj}_{u_2}(3, 1, 1, -1)\big) = (1, -1, 1, -1). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{proj}_W(19, -3, -6, 2) &= \text{proj}_{u_1}(19, -3, -6, 2) + \text{proj}_{u_2}(19, -3, -6, 2) + \text{proj}_{u_3}(19, -3, -6, 2) \\ &= (5, 5, -5, -5) + (3, 3, 3, 3) + \left(\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{7}{2}\right) \\ &= \left(\frac{23}{2}, \frac{9}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{11}{2}\right). \end{aligned}$$

c) Para simplificar vamos resolver o sistema de forma geral, isto é, precisamos escalonar o sistema

$$c\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & x\\ 1 & 2 & 1 & y\\ -1 & 0 & 1 & z\\ -1 & 0 & -1 & t\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & x\\ 0 & 0 & -2 & y-x\\ 0 & 2 & 4 & x+z\\ 0 & 2 & 2 & t+x\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & x\\ 0 & 2 & 2 & t+x\\ 0 & 2 & 4 & x+z\\ 0 & 0 & -2 & y-x\end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & x\\ 0 & 2 & 2 & t+x\\ 0 & 0 & 2 & z-t\\ 0 & 0 & 0 & -t-x+y+z\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & -t\\ 0 & 2 & 0 & 2t+x-z\\ 0 & 0 & 2 & z-t\\ 0 & 0 & 0 & -t-x+y+z\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & -t-z\\ 0 & 2 & 0 & 2t+x-z\\ 0 & 0 & 2 & z-t\\ 0 & 0 & 0 & -t-x+y+z\end{bmatrix}$$

Substituindo (x, y, z, t) por $\left(\frac{23}{2}, \frac{9}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{11}{2}\right)$ obtemos $(x, y, z) = \left(2, -\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

d) a fórmula geral para a projeção e dada por

$$\mathrm{proj}_W(x, y, z, t) = \frac{1}{4}\left(-t+3x+y+z, t+x+3y-z, t+x-y+3z, 3t-x+y+z\right).$$

---

4. $[2,0pts]$ Identifique a quádrica abaixo e determine as direções de seus eixos

$$x^2 - 10xy + y^2 - 10x + 2y + 13 = 0.$$

Solução: Vamos iniciar reescrevendo a equação na forma de matrizes

$$\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -5\\ -5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-10 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}13\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\end{bmatrix}.$$

precisamos diagonalizar a matriz $A = \begin{bmatrix}1 & -5\\ -5 & 1\end{bmatrix}$, o polinômio característico é $\Delta_A(x) = x^2 - 2x - 24 = (x-6)(x+4) = 0$. Para o autovalor $x = 6$, vamos determinar $\mathrm{N}\,(A - 6I)$.

$$A - 6I = \begin{bmatrix}1 & -5\\ -5 & 1\end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5 & -5\\ -5 & -5\end{bmatrix},$$

vemos que uma linha é multipla da outra, então ao escalonar este sistema rapidamente obtemos a equação $-x - y = 0 \Leftrightarrow x = -y$, e disto sabemos que um vetor típico do $\mathrm{N}\,(A - 6I)$ é do tipo $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\ -x\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$. Utilizando a informação do teorema espectral sabemos que o autovetor associado ao autovalor -4 é $\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$.

Considere $\alpha = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\right\}$ e β a base canônica. Logo se $P = [I]^{\beta}_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$, temos que

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}_{\alpha} = P\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}_{\beta}.$$

Fazendo a mudança de coordenadas temos

$$\begin{bmatrix}x' & y'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-6\sqrt{2} & -4\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}13\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\end{bmatrix}.$$

Completando quadrado obtemos

$$6x'^2 - 6\sqrt{2}x' - 4y'^2 - 4\sqrt{2}y' + 13 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$6\left(x'^2 - \sqrt{2}x' + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\right) - 4\left(y'^2 + \sqrt{2}y' + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\right) = -13.$$

Obtemos

$$6\left(x' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4\left(y' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = -13 + 3 - 2 = -12.$$

Fazendo a mudança de coordenadas $x'' = x' - \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $y'' = y' + \frac{1}{\sqrt{2}}$ a equação torna-se

$$6x''^2 - 4y''^2 = -12 \Leftrightarrow -\frac{x''^2}{2} + \frac{y''^2}{3} = 1.$$

Fazendo os gráficos obtemos