Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática
VR de Álgebra Linear - GAN00140

04/07/2017

---

1. $[2,0pts]$ Considere os subespaços vetoriais

$$U = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z-t=0 \text{ e } 2x+2y+3z-3t=0\right\}$$
$$V = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 6x+3y-3t=0 \text{ e } 2z=0\right\}.$$

Encontre uma base para $U \cap V$.

Solução: Para um vetor $\mathbb{R}^4$ estar em $U \cap V$ ele deve satisfazer todas as condições simultaneamente, isto é, estamos procurando as soluções (se houver) de

$$\begin{cases} x+y+z-t=0 \\ 2x+2y+3z-3t=0 \\ 6x+3y-3t=0 \\ 2z=0 \end{cases}$$

Obtendo a matriz do sistema e escalonando obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \\ 6 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Já percebemos que todas as linhas vão ter um pivô e portanto a única solução para o sistema será o vetor nulo. Portanto, a base para $U \cap V = \{0\}$ é o conjunto vazio.

---

2. $[2,0pts]$ Use escalonamento para resolver e caracterizar a solução do sistema linear. Se houver solução expresse na forma paramétrica.

$$\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3+2x_5=0 \\ 2x_1+6x_2-5x_3-2x_4+4x_5-3x_6=-1 \\ 5x_3+10x_4+15x_6=5 \\ 2x_1+6x_2+8x_4+4x_5+18x_6=6 \end{cases}$$

Solução: Obtendo a matriz ampliada do sistema e escalonando obtemos

$$\begin{bmatrix}1&3&-2&0&2&0&0\\2&6&-5&-2&4&-3&-1\\0&0&5&10&15&5&5\\2&6&0&8&4&18&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&-2&0&2&0&0\\0&0&-1&-2&0&-3&-1\\0&0&5&10&0&15&5\\0&0&4&8&0&18&6\end{bmatrix}\to$$

$$\to\begin{bmatrix}1&3&-2&0&2&0&0\\0&0&-1&-2&0&-3&-1\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&6&2\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&3&0&4&2&6&2\\0&0&-1&-2&0&-3&-1\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$\cdots\to\begin{bmatrix}1&3&0&4&2&0&0\\0&0&-1&-2&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

Portanto, as variáveis x_1, x_3 e x_6 vão ser dadas em função de x_2, x_4 e x_5,

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}-4\\0\\-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+x_5\begin{bmatrix}-2\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

---

3. $[2,0pts]$ Considere $u=(2,5,-1)$, $v=(4,16,-2)$, $y=(1,2,3)$ e $W=\text{Span}\{u,v\}$. Encontre o ponto de W que esta mais próximo de y.

Solução: Vamos iniciar encontrando uma base ortogonal para W

$$u' = u$$
$$v' = v - \text{Proj}_{u'}(v) = (4,16,-2)-(6,15,-3)=(-2,1,1).$$

Logo, o vetor procurado é

$$w=\text{Proj}_{u'}(y)+\text{Proj}_{v'}(y)=\left(\frac{3}{5},\frac{3}{2},-\frac{3}{10}\right)+\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{2}{5},2,\frac{1}{5}\right).$$

---

4. $[2,0pts]$ Encontre a mudança de coordenadas na qual a quadrática abaixo se torna uma soma/subtração de quadrados

$$16x^2+24xy+9y^2+60x-80y+100=0.$$

Solução: Reescrevendo o sistema na forma matricial obtemos

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 60 & -80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

Logo precisamos estudar o operador $A = \begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$. O seu polinômio característico é $\Delta_A(x) = x^2 - 25x = (x-0)(x-25) = 0$. Logo os autovalores são 0 e 25. Associado ao autovalor $0 \to (-3, 4)$ e ao autovalor $25 \to (4, 3)$. Considere a base $\alpha = \left\{ \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ e β a base canônica do $\mathbb{R}^2$. Seja $P = [I]^\alpha_\beta$, então

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

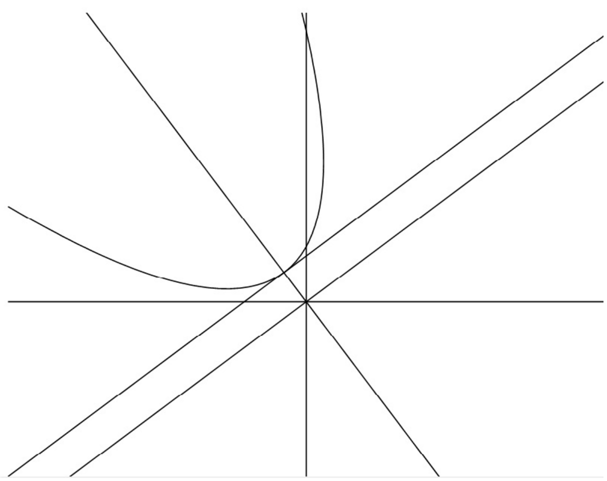
Logo no sistema de coordenadas (x', y') a equação matricial se torna

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

e temos a equação a qual completamos o quadrado

$$25x'^2 - 100y' + 100 = 0 \Leftrightarrow x'^2 = 4(y' - 1).$$

Logo o esboço desta parabola fica



5. $[2,0pts]$ Calcule a expressão de A^n, com n inteiro, quando

$$A = \begin{bmatrix} -11 & -6 \\ 18 & 10 \end{bmatrix}.$$

Solução: Calculando o polinômio característico, suas raízes (autovalores), e os autovetores associados obtemos

$$\Delta_A(x) = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1) = 0$$

Os autovalores são os seguintes: $x = -2 \to u = (-2,3)$ para $x = 1 \to (-1,2)$. Considere a nova base $\alpha = \{u, v\}$ e seja β a base canônica. Daí que: $P = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $P^{-1}A.P = D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Logo,

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{bmatrix} \left(\frac{1}{-1}\right) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + (-2)^{n+2} & -2 - (-2)^{n+1} \\ 6 - 3(-1)^n 2^{n+1} & 4 - 3(-2)^n \end{bmatrix}.$$
