5ª Lista de Exercícios - Álgebra Linear II - 2017

Estas listas foram retiradas do livro de Álgebra Linear do Hoffman e Kunze

Exercícios Dúvida

1. Seja T um operador linear sobre R^3 que é representado em relação à base ordenada canônica pela matriz

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Exprimir o polinômio minimal p de T sob a forma $p = p_1 p_2$, sendo p_1 e p_2 unitários e irredutíveis sobre o corpo dos números reais. Seja W_i o núcleo de $p_i(T)$. Determinar bases $\mathscr{B}_i$ dos espaços W_1 e W_2. Se T_i é o operador induzido sobre W_i por T; determinar a matriz de T_i em relação à base $\mathscr{B}_i$ (acima).

2. Seja T o operador linear sobre R^3 que é representado pela matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

em relação à base ordenada canônica. Mostrar que existe um operador diagonalizável D sobre R^3 e um operador nilpotente N sobre R^3 tais que $T = D + N$ e $DN = ND$. Determinar as matrizes de D e N em relação à base canônica. (Basta repetir a demonstração do Teorema 12 para este caso particular.)

3. Se V é o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a n sobre um corpo F, mostrar que o operador derivação sobre V é nilpotente.

4. Seja T um operador linear sobre o espaço V de dimensão finita cujo polinômio característico seja

$$f = (x - c_1)^{d_1} \dots (x - c_k)^{d_k}$$

e cujo polinômio minimal seja

$$p = (x - c_1)^{r_1} \dots (x - c_k)^{r_k}.$$

Seja W_i o núcleo de $(T - c_i I)^{r_i}$.

(a) Demonstrar que W_i é o conjunto dos vetores α em V tais que $(T - c_i I)^m \alpha = 0$ para algum inteiro positivo m (que pode depender de α)

(b) Demonstrar que a dimensão de W_i é d_i. [*Sugestão*: Se T_i é o operador induzido sobre W_i por T, então $T_i - c_i I$ é nilpotente; assim, o polinômio característico de $T_i - c_i I$ deve ser x^{e_i}, sendo e_i a dimensão de W_i (demonstração?); assim, o polinômio característico de T_i é $(x - c_i)^{e_i}$; agora usar o fato de que o polinômio característico de T é o produto dos polinômios característicos de T_i para mostrar que $e_i = d_i$.]

5. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo dos números complexos. Seja T um operador linear sobre V e seja D a parte diagonalizável de T. Demonstrar que se g é um polinômio qualquer com coeficientes complexos, então a parte diagonalizável de $g(T)$ é $g(D)$.

6. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo F e seja T um operador linear sobre V tal que posto $(T) = 1$. Demonstrar que ou T é diagonalizável ou T é nilpotente, não ambos.

7. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre F e seja T um operador linear sobre V. Suponhamos que T comute com todo operador linear diagonalizável sobre V. Demonstrar que T é um múltiplo escalar do operador idêntico.

8. Seja V o espaço das $n \times n$ matrizes sobre um corpo F e seja A uma $n \times n$ matriz fixa sobre F. Definamos um operador linear T sobre V por $T(B) = AB - BA$. Demonstrar que se A é uma matriz nilpotente, então T é um operador nilpotente.

9. Dar um exemplo de duas 4×4 matrizes nilpotentes que tenham o mesmo polinômio minimal (elas têm, necessariamente, o mesmo polinômio característico) mas que não sejam semelhantes.

10. Seja T um operador linear sobre o espaço V de dimensão finita, seja $p = p_1^{r_1}, \dots, p_k^{r_k}$ o polinômio minimal de T e seja $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ a decomposição primária de T, isto é, W_j é o núcleo de $p_j(T)^{r_j}$. Seja W um subespaço qualquer de V que seja invariante sob T. Demonstrar que

$$W = (W \cap W_1) \oplus (W \cap W_2) \oplus \dots \oplus (W \cap W_k).$$

11. O que está errado na seguinte demonstração do Teorema 13? Suponhamos que o polinômio minimal de T seja um produto de fatores lineares. Então, pelo Teorema 5, T é triangulável. Seja $\mathscr{B}$ uma base ordenada tal que $A = [T]_{\mathscr{B}}$ seja triangular superior. Seja D a matriz diagonal com elementos diagonais $a_{11}, \dots, a_{nn}$. Então $A = D + N$, onde N é estritamente triangular superior. Evidentemente N é nilpotente.

12. Se você pensou sobre o Exercício 11, pense novamente, após observar o que o Teorema 7 afirma sobre as partes diagonalizável e nilpotente de T.

13. Seja T um operador linear sobre V com polinômio minimal da forma p^n, sendo p irredutível sobre o corpo dos escalares. Mostrar que existe um vetor α em V tal que o T-anulador de α seja p^n.

14. Usar o teorema da decomposição primária e o resultado do Exercício 13 para demonstrar o seguinte: Se T é um operador linear arbitrário sobre um espaço vetorial V de dimensão finita, então existe um vetor α em V cujo T-anulador é igual ao polinômio minimal de T.

15. Se N é um operador linear nilpotente sobre um espaço vetorial n-dimensional V, então o polinômio característico de N é x^n.

são semelhantes porque, para a primeira matriz, o espaço-solução de $(A - 2I)$ tem dimensão 3, enquanto que para a segunda matriz a dimensão é 2.

Exemplo 8. As equações diferenciais com coeficientes constantes (Exemplo 14, Capítulo 6) oferecem uma boa ilustração da forma de Jordan. Sejam $a_0, \ldots, a_{n-1}$ números complexos e seja V o espaço de todas as funções f, n vezes diferenciáveis sobre um intervalo da reta real, que satisfaçam a equação diferencial

$$\frac{d^n f}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{df}{dx} + a_0 f = 0.$$

Seja D o operador derivação. Então V é invariante sob D porque V é o núcleo de $p(D)$, onde

$$p = x^n + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Qual é a forma de Jordan do operador derivação sobre V?

Sejam $c_1, \ldots, c_k$ as raízes complexas distintas de p:

$$p = (x - c_1)^{r_1} \ldots (x - c_k)^{r_k}.$$

Seja V_i o núcleo de $(D - c_i I)^{r_i}$, isto é, o conjunto das soluções da equação diferencial

$$(D - c_i I)^{r_i} f = 0.$$

Como observamos no Exemplo 15, Capítulo 6, o teorema da decomposição primária nos diz que

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k.$$

Seja N_i a restrição de $D - c_i I$ a V_i. A forma de Jordan do operador D (sobre V) é então determinada pelas formas racionais dos operadores nilpotentes $N_1, \ldots, N_k$ sobre os espaços $V_1, \ldots, V_k$.

Assim, o que devemos conhecer (para vários valores de c) é a forma racional do operador $N = (D - cI)^r$ sobre o espaço V_c, que é formada pelas soluções da equação

$$(D - cI)^r f = 0.$$

Quantos blocos nilpotentes elementares existem na forma racional de N? O número será a nulidade de N, isto é, a dimensão do espaço característico associado ao valor característico c. Essa dimensão é 1 porque qualquer função que satisfaça a equação diferencial

$$Df = cf$$

é um múltiplo escalar da função exponencial $h(x) = e^{cx}$. Portanto, o operador N (sobre o espaço V_c) possui um vetor cíclico. Uma boa escolha para um vetor cíclico é $g = x^{r-1}h$:

$$g(x) = x^{r-1}e^{cx}.$$

Isso nos dá

$$Ng = (r-1)x^{r-2}h$$
$$\vdots$$
$$N^{r-1}g = (r-1)!\,h$$

O parágrafo anterior nos mostra que a forma de Jordan de D (sobre o espaço V) é a soma direta de k matrizes elementares de Jordan, uma para cada raiz c_i.

Exercícios

lista

1. Sejam N_1 e N_2 3×3 matrizes nilpotentes sobre o corpo F. Demonstrar que N_1 e N_2 são semelhantes se, e somente se, possuem o mesmo polinômio minimal.

2. Usar o resultado do Exercício 1 e a forma de Jordan para demonstrar o seguinte: Sejam A e B $n \times n$ matrizes sobre o corpo F que possuam o *mesmo* polinômio característico

$$f = (x - c_1)^{d_1}, \ldots, (x - c_k)^{d_k}$$

e o mesmo polinômio minimal. Se nenhum d_i é maior que 3, então A e B são semelhantes.

3. Se A é uma 5×5 matriz complexa com polinômio característico $f = (x-2)^3(x+7)^2$ e polinômio minimal $p = (x-2)^2(x+7)$, qual é a forma de Jordan de A?

4. Quantas formas de Jordan são possíveis para a 6×6 matriz complexa cujo polinômio característico é $(x+2)^4(x-1)^2$?

$T = D + N$

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Determinar vetores não-nulos $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ que satisfaçam as condições do Teorema 3.

9. Seja A a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Determinar uma 3×3 matriz real inversível P tal que $P^{-1}AP$ esteja sob a forma racional.

10. Seja F um subcorpo do corpo dos números complexos e seja T o operador linear sobre F^4 que é representado em relação à base ordenada canônica pela matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b & 2 \end{bmatrix}.$$

Determinar o polinômio característico de T. Considerar os casos $a = b = 1$; $a = b = 0$; $a = 0$, $b = 1$. Em cada um destes casos, determinar o polinômio minimal de T e vetores não-nulos $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ que satisfaçam as condições do Teorema 3.

lista do exerc

11. Demonstrar que se A e B são 3×3 matrizes sobre o corpo F, uma condição necessária e suficiente para que A e B sejam semelhantes sobre F é que possuam o mesmo polinômio característico e o mesmo polinômio minimal. Dar um exemplo que mostra que isto é falso para 4×4 matrizes.

12. Seja F um subcorpo do corpo dos números complexos e sejam A e B $n \times n$ matrizes sobre F. Demonstrar que se A e B são semelhantes sobre o corpo dos números complexos, então elas são semelhantes sobre F. (*Sugestão*: Demonstrar que a forma racional de A é a mesma seja A considerada como uma matriz sobre F ou como uma matriz sobre C; o mesmo para B.)

13. Seja A uma $n \times n$ matriz com elementos complexos. Demonstrar que se todo valor característico de A é real, então A é semelhante a uma matriz com elementos reais.

14. Seja T um operador linear sobre o espaço V de dimensão finita. Demonstrar que existe um vetor α em V com a seguinte propriedade: Se f é um polinômio e $f(T)\alpha = 0$, então $f(T) = 0$. (Um tal vetor α é denominado um **vetor separador** para a álgebra dos polinômios em T.) Para o caso em que T possui um vetor cíclico, demonstrar diretamente que todo vetor cíclico é um vetor separador para a álgebra dos polinômios em T.

15. Seja F um subcorpo do corpo dos números complexos e seja A uma $n \times n$ matriz sobre F. Seja p o polinômio minimal de A. Se considerarmos A como uma matriz sobre C, então A possuirá um polinômio minimal f, quando considerada como uma $n \times n$ matriz sobre C. Usar um teorema sobre equações lineares para demonstrar que $p = f$. De que forma este resultado decorre do teorema da decomposição cíclica?

16. Seja A uma $n \times n$ matriz com elementos *reais* tal que $A^2 + I = 0$. Demonstrar que n é par e que, se $n = 2k$, então A é semelhante sobre o corpo dos números reais a uma matriz da forma em blocos

$$\begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

onde I é a $k \times k$ matriz unidade.

17. Seja T um operador linear sobre um espaço vetorial V de dimensão finita. Suponhamos que
(a) o polinômio minimal de T seja uma potência de um polinômio irredutível;
(b) o polinômio minimal seja igual ao polinômio característico.
Demonstrar que nenhum subespaço não-trivial e T-invariante possui um subespaço suplementar T-invariante.

18. Se T for um operador linear diagonalizável, então todo subespaço T-invariante terá um subespaço suplementar T-invariante.

19. Seja T um operador linear sobre o espaço V de dimensão finita. Demonstrar que T possui um vetor cíclico se, e somente se, vale o seguinte: Todo operador linear U que comuta com T é um polinômio em T.

20. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre F e seja T um operador linear sobre V. Perguntamos quando é que todo vetor não-nulo em V é um vetor cíclico de T. Demonstrar que isto ocorre se, e somente se, o polinômio característico de T é irredutível sobre F.

21. Seja A uma $n \times n$ matriz com elementos *reais*. Seja T o operador linear sobre R^n que é representado por A em relação à base ordenada canônica e seja U o operador linear sobre C^n que é representado por A em relação à base ordenada canônica. Usar o resultado do Exercício 20 para demonstrar o seguinte: Se os únicos subespaços invariantes sob T são R^n e o subespaço nulo, então U é diagonalizável.

7.3 A Forma de Jordan

Suponhamos que N seja um operador linear nilpotente sobre o espaço V de dimensão finita. Consideremos a decomposição cíclica de N que obtemos por meio do Teorema 3. Temos um

5. O operador derivação sobre o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a 3 é representado em relação à base ordenada "natural" pela matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Qual é a forma de Jordan desta matriz? (F é um subcorpo do corpo dos números complexos.)

6. Seja A a matriz complexa

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determinar a forma de Jordan de A.

7. Se A é uma $n \times n$ matriz sobre o corpo F com polinômio característico

$$f = (x - c_1)^{d_1} \dots (x - c_k)^{d_k},$$

qual é o traço de A?

8. Classificar, a menos da semelhança, todas as 3×3 matrizes complexas A tais que $A^3 = I$. matrizes

9. Classificar, a menos da semelhança, todas as $n \times n$ matrizes complexas A tais que $A^n = I$.

10. Seja n um inteiro positivo, $n \geq 2$ e seja N uma $n \times n$ matriz sobre o corpo F tal que $N^n = 0$ mas $N^{n-1} \neq 0$. Demonstrar que N não possui nenhuma raiz quadrada, isto é, que não existe nenhuma $n \times n$ matriz A tal que $A^2 = N$.

$p(x) = x^6$ Qual o índice de nilpotência

11. Sejam N_1 e N_2 6×6 matrizes nilpotentes sobre o corpo F. Suponhamos que N_1 e N_2 tenham o mesmo polinômio minimal e a mesma nulidade. Demonstrar que N_1 e N_2 são semelhantes. Mostrar que isto não é válido para 7×7 matrizes nilpotentes.

12. Usar o resultado do Exercício 11 e a forma de Jordan para demonstrar o seguintes: Sejam A e B $n \times n$ matrizes sobre o corpo F que possuam o mesmo polinômio característico

$$f = (x - c_1)^{d_1} \dots (x - c_k)^{d_k}$$

e o mesmo polinômio minimal. Suponhamos também que para cada i, os espaços-soluções de $(A - c_iI)$ e de $(B - c_iI)$ tenham a mesma dimensão. Se nenhum dos d_i é maior que 6, então A e B são semelhantes.

possuem a mesma forma de Jordan

13. Se N é uma $k \times k$ matriz nilpotente elementar, isto é, $N^k = 0$ mas $N^{k-1} \neq 0$, mostrar que N^t é semelhante a N. Usar a forma de Jordan para demonstrar que toda $n \times n$ matriz complexa é semelhante à sua transposta.

14. O que está errado na demonstração que segue? Se A é uma $n \times n$ matriz complexa tal que $A^t = -A$, então A é 0. (*Demonstração*: Seja J a forma de Jordan de A. Como $A^t = -A$, $J^t = -J$. Mas J é triangular, logo $J^t = -J$ implica que todo elemento de J é nulo. Como $J = 0$ e A é semelhante a J, vemos que $A = 0$.) (Dar um exemplo de uma A não-nula tal que $A^t = -A$.)

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

15. Se N é uma 3×3 matriz nilpotente sobre C, demonstrar que $A = I + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2$ satisfaz $A^2 = I + N$, isto é, A é uma raiz quadrada $I + N$. Usar a série binomial $(1 + t)^{1/2}$ para obter uma fórmula semelhante para a raiz quadrada de $I + N$, onde N é uma $n \times n$ matriz nilpotente arbitrária sobre C.

16. Usar o resultado do Exercício 15 paja demonstrar que se c é um número complexo não-nulo e N é uma matriz complexa nilpotente, então $(cI + N)$ possui uma raiz quadrada. Usar depois a forma de Jordan para demonstrar que toda $n \times n$ matriz complexa não-singular possui uma raiz quadrada.

7.4 Cálculo dos Fatores Invariantes

Suponhamos que A seja uma $n \times n$ matriz com elementos no corpo F. Queremos descobrir um processo que permita calcular os fatores invariantes $p_1, \dots, p_r$ que definem a forma racional de A. Comecemos com o caso muito simples no qual A é a matriz associada (7.2) a um polinômio unitário

$$p = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0.$$

Vimos na Seção 7.1 que p é o polinômio minimal e característico da matriz associada A. Queremos agora efetuar um cálculo direto, que mostre que p é o polinômio característico de A. Nesse caso,

$$xI = A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & c_0 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x + c_{n-1} \end{bmatrix}$$