Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática
Gabarito da VR de Álgebra Linear II

11/7/2017

---

1. $[2,0pts]$ Em cada item determine se a proposição é verdadeira ou falsa e justifique com uma demonstração ou um contra-exemplo.

   a) Se o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é L.D., então algum dos três vetores é múltiplo de algum outro.

   b) Se A e B são matrizes invertíveis, então $A + B$ também é invertível.

   c) Seja $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ uma base do subespaço V de $\mathbb{R}^n$. Se $w \in \mathbb{R}^n$ é ortogonal a cada vetor da base B, então $w \in V^\perp$ (isto é, w é ortogonal a qualquer vetor de V).

   d) Se $A_{4\times4}$ é uma matriz ortogonal, então $4A$ também é uma matriz ortogonal.

   Solução: a) FALSA, veja $(1, 2, 0) = 1(1, 0, 0) + 2(0, 1, 0)$.

   b) FALSA, veja que $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   c) VERDADEIRA, pois se $v \in V$ devem existir escalares a_i tais que $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_m$ e

$$\begin{aligned} \langle v, w\rangle &= \langle a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_m, w\rangle \\ &= a_1 \langle v_1, w\rangle + a_2 \langle v_2, w\rangle + \cdots + a_n \langle v_m, w\rangle = 0. \end{aligned}$$

   d) FALSA, pois se A é ortogonal, então se v é um vetor unitário $\langle 4Av, 4Av\rangle = 16 \langle Av, Av\rangle = 16 \langle v, v\rangle = 16$.

---

2. $[2,0pts]$ Encontre a mudança de coordenadas na qual a quadrática abaixo se torna uma soma/subtração de quadrados. Além disso, faça um esboço dos novos eixos e da quádrica

$$16x^2 + 24xy + 9y^2 + 60x - 80y + 100 = 0.$$

   Solução: Reescrevendo o sistema na forma matricial obtemos

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 60 & -80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

   Logo precisamos estudar o operador $A = \begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$. O seu polinômio característico é $\Delta_A(x) = x^2 - 25x = (x - 0)(x - 25) = 0$. Logo os autovalores são 0 e 25.

Associado ao autovalor $0 \to (-3,4)$ e ao autovalor $25 \to (4,3)$. Considere a base $\alpha = \left\{ \frac{1}{5}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}, \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix} \right\}$ e β a base canônica do $\mathbb{R}^2$. Seja $P = [I]^{\alpha}_{\beta}$, então

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}4 & -3\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}.$$

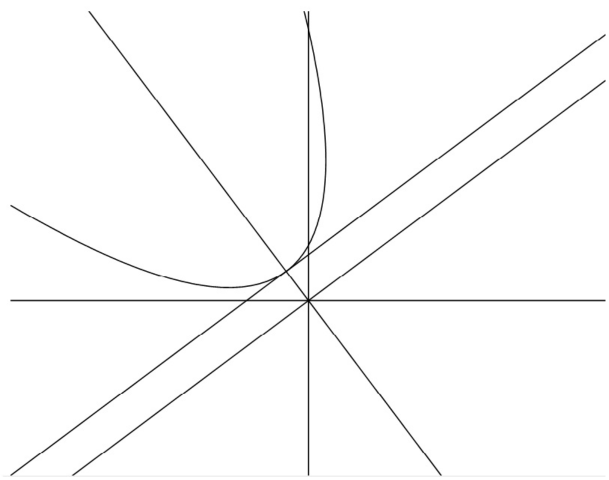
Logo no sistema de coordenadas (x', y') a equação matricial se torna

$$\begin{bmatrix}x' & y'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}25 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & -100\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}100\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\end{bmatrix}.$$

e temos a equação a qual completamos o quadrado

$$25x'^2 - 100y' + 100 = 0 \Leftrightarrow x'^2 = 4(y'-1).$$

Logo o esboço desta parabola fica



---

3. $[2,0pts]$ Considere a função $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por

$$T(p(x)) = p(1-x)$$

a) Verifique que T é um operador linear;

b) Determine a matriz de T com respeito à base $\beta = \{1, x, x^2\}$;

c) Este operador é diagonalizável? Se o for encontre uma base de autovetores e a matriz de mudança de coordenadas.

Solução: a) Claramente a imagem de um vetor de grau menor ou igual a 2, por T, é novamente um polinômio de grau menor ou igual a 2. Além disso, $f(x), g(x) \in \mathcal{P}_2$ e α é um escalar

$$T((f+\alpha g)(x)) = (f+\alpha g)(1-x) = f(1-x) + \alpha g(1-x) = T(f(x)) + \alpha T(g(x))$$

b) Fazendo os calculos necessários para obter a matriz deste operador com respeito da base β

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \\ T(x) &= 1 - x = 1\cdot 1 + (-1)\cdot x + 0\cdot x^2 \\ T(x^2) &= 1 - 2x + x^2 = 1\cdot 1 + (-2)\cdot x + 1\cdot x^2 \end{aligned}$$

e portanto,

$$A = [T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) O polinômio característico é $\Delta_A(x) = (x-1)^2(x+1)$ os autovalores são -1 e 1. Associado ao autovalor $1 \to (1,0,0), (0,-1,1)$ e ao autovalor $-1 \to (1,-2,0)$. Portanto, o operador é diagonalizável e a base de autovalores é $\{1, -x+x^2, 1-2x\}$.

---

4. $[2,5pts]$ Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e $P : V \to V$ o operador de projeção ortogonal de V sobre o subespaço W. Mostre que o operador $I - P$ é idempotente e que é operador de projeção ortogonal de V sobre $W^\perp$.

Solução: Precisamos provar dois fatos: 1ª $(I-P)^2 = I - P$ e 2ª $\mathrm{N}(I-P) = \mathrm{IM}(I-P)^\perp$, vamos a eles:

$$(I-P)^2 = I - PI - IP + P^2 = I - P - P + P = I - P.$$

Sabemos que P é autoadjunto e $v \in \mathrm{N}(I-P) \Leftrightarrow Pv = v \Leftrightarrow v \in \mathrm{IM}(P)$.

Seja $v \in \mathrm{N}(I-P)$ e $w \in V$ qualquer, logo

$$\langle v, (I-P)(w)\rangle = \langle v, w\rangle - \langle v, Pw\rangle = \langle Pv, w\rangle - \langle v, Pw\rangle = 0.$$

Logo, $v \in \mathrm{IM}(I-P)^\perp$. Seja $u \in \mathrm{IM}(I-P)^\perp$, portanto

$$\langle u, (I-P)(w)\rangle = 0,\ \ \forall w \in V \Leftrightarrow \langle u, w\rangle - \langle u, Pw\rangle = 0,\ \ \forall w \in V.$$

Mas, por P ser autoadjunto temos $\langle u', Pv'\rangle = \langle Pu', v'\rangle$, $\forall u', v' \in V$, temos que a última igualdade acima pode ser substituída por

$$\langle u, w\rangle - \langle Pu, w\rangle = 0,\ \ \forall w \in V \Leftrightarrow u = Pu \Leftrightarrow u \in \mathrm{IM}(P).$$

Portanto, $u \in \mathrm{N}(I-P)$. Provando assim a igualdade de conjuntos.

---

5. $[1,5pts]$ Encontre uma base ortogonal do subespaço vetorial $W \subset \mathbb{C}^3$ gerado por $v_1 = (1, i, 0)$ e $v_2 = (1, 2, 1-i)$.

Solução: Pelo processo de Gram-Schmidt temos

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, i, 0) \\ u_2 &= (1, 2, 1-i) - \frac{1+2i}{2}(1, i, 0) = (\frac{1}{2} + i, 1 - \frac{i}{2}, 1 - i). \end{aligned}$$

Portanto $\big\{(1, i, 0), (\frac{1}{2} + i, 1 - \frac{i}{2}, 1 - i)\big\}$ é uma base ortogonal procurada.
