Universidade Federal Fluminense

2^a Prova de Álgebra Linear Aplicada

Prof. Jones Colombo

Aluno(a):____

09/12/2011

1. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$, definida por $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 2y + z + 2w \\ x + y + 2z \\ -x + z - 2w \\ 3y - z + 4w \\ x + y + z + w \end{bmatrix}$.

   a) (1,0) Determine o núcleo de T.

   b) (1,0) Determine a imagem de T.

   c) (0,5) Encontre uma base para a imagem de T.

   d) (0,5) Determine $[T]$, a matriz de T com relação às bases canônicas.

2. Considere que $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear tal que $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   a) (0,5) Mostre que $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$.

   b) (1,0) Determine $[v]_\beta$ se $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

   c) (0,5) Determine $T^{-1}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)$.

3. Mostre que o operador $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -3x - 2y \\ -2x - 6y \end{bmatrix}$ é diagonalizável.

   a) (0,5) Encontre os autovalores de T.

   b) (0,5) Encontre os respectivos autovetores associados aos respectivos autovalores obtidos no item anterior.

   c) (0,5) Encontre uma base β de autovetores para $\mathbb{R}^2$.

   d) (0,5) É possível obter uma base de autovetores sendo ortonormal? (sim ou não)

   e) (1,0) Determine P invertível tal que $[T] = P^{-1}\,[T]_\beta^\beta\, P$.

4. Rapidinhas (não deixe de justificar): (2,0)

   a) Seja $\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. Ache uma base ortonormal β a partir da base α.

   b) Os vetores $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$ geram o $\mathbb{R}^5$?

   c) Qual é a dimensão do núcleo de T dada por $T\left(\begin{bmatrix} x & y & z & w & r & s \end{bmatrix}^t\right) = x + 2y + 7z + w - 5r + s$?

   d) A transformação T dada por $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$ e $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ é injetora?

Boa Prova!