Universidade Federal Fluminense

Gabarito da 2ª Prova de Álgebra Linear Aplicada

09/12/2011

1. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$, definida por $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+2y+z+2w \\ x+y+2z \\ -x+z-2w \\ 3y-z+4w \\ x+y+z+w \end{bmatrix}$.

   a) (1,0) Determine o núcleo de T.

   b) (1,0) Determine a imagem de T.

   c) (0,5) Encontre uma base para a imagem de T.

   d) (0,5) Determine $[T]$, a matriz de T com relação às bases canônicas.

Solução. a) e d) Vamos escalonar a matriz $[T]$ com respeito a base canônica do $\mathbb{R}^5$ e $\mathbb{R}^4$, então temos a matriz A abaixo e escalonando ela obtemos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e daí o núcleo de T é igual $\text{Nuc}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -w \\ -w \\ w \\ w \end{bmatrix} : w \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

b) Observe que podemos escrever a transformação da como combinação dos seguintes vetores e daí eles geram a imagem de T

$$\begin{bmatrix} x+2y+z+2w \\ x+y+2z \\ -x+z-2w \\ 3y-z+4w \\ x+y+z+w \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + w\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

c) Se colocarmos os vetores que geram a imagem de T nas colunas e escalonarmos os vetores não nulos que sobrarem formaram uma base para a imagem de T então

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E portanto $\mathcal{IM}(T) = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

Outra forma é olharmos na letra a) quando escalonamos as três primeiras colunas são colunas-pivô. Portanto, os três primeiros vetores da letra b) geram a imagem, e portanto, a

$$\mathcal{IM}(T) = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

2. Considere que $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear tal que $T\left(\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]\right) = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right], T\left(\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]\right) = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ e $T\left(\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]\right) = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

a) (0,5) Mostre que $\beta = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \right\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$.

b) (1,0) Determine $[v]_\beta$ se $v = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right]$.

c) (0,5) Determine $T^{-1}\left(\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right]\right)$.

Solução. a) Existem pelo menos duas formas de decidir se β é uma base. Uma delas é verificar que este conjunto gera o $\mathbb{R}^3$ e que é LI. A outra forma é montarmos uma matriz colocando estes vetores como colunas e depois calcular o determinante, se o determinante for diferente de zero, este vetores serão LI. Pois os mesmos podem ser vistos como os geradores de um paralelepípedo e o valor absoluto do determinante será o volume deste paralelepípedo. Então,

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 \neq 0.$$

b) Se chamarmos α a base canônica do $\mathbb{R}^3$ então precisamos determinar a matriz de mudança de coordenadas $[I]_\beta^\alpha$, para isto precisamos escrever os vetores da base canônica em termos dos vetores da base β e fazendo as contas obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

E daí, $[I]_\beta^\alpha[v] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y - z \\ -3x + 2y + 2z \\ -x + z \end{bmatrix}$.

c) Observe que a matriz de T com respeito com respeito a base canônica é

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [I]_\alpha^\beta$$

E para calcular T^{-1} basta inverter a matriz acima, mas inverter a matriz acima é equivalente a calcular $\left([I]_\alpha^\beta\right)^{-1} = [I]_\beta^\alpha$ a qual acabamos de calcular. E daí,

$$T^{-1}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y - z \\ -3x + 2y + 2z \\ -x + z \end{bmatrix}.$$

3. Mostre que o operador $T\left(\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]\right) = \left[\begin{smallmatrix} -3x-2y \\ -2x-6y \end{smallmatrix}\right]$ é diagonalizável.

a) (0,5) Encontre os autovalores de T.

b) (0,5) Encontre os respectivos autoespaços associados aos respectivos autovalores obtidos no item anterior.

c) (0,5) Encontre uma base β de autovetores para $\mathbb{R}^2$.

d) (0,5) É possível obter uma base de autovetores sendo ortonormal? (sim ou não)

e) (1,0) Determine P invertível tal que $[T] = P^{-1}\,[T]_\beta^\beta\,P$.

Solução. a) A matriz de T com respeito a base canônica α do $\mathbb{R}^2$ é $A = [T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$ que é simétrica, e portanto, diagonalizável. Vamos calcular o polinômio característico e suas raízes

$$\Delta_T(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} -3-\lambda & -2 \\ -2 & -6-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 9\lambda + 14 = (\lambda + 7)(\lambda + 2).$$

Portanto, os autovalores de T são -2 e -7.

b) Para $\lambda = -7$ temos que calcular Nuc $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ e nos dá $V_{-7} = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$. Para $\lambda = -2$ temos que calcular Nuc $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ e nos dá $V_{-2} = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

c) e d) é fácil de ver que $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0$ logo são ortogonais, normalizando obtemos uma base ortonormal

$$\beta = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

e) Como β é uma base ortonormal. Logo a matriz $[I]^{\beta}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal. Precisamos calcular $[I]^{\alpha}_{\beta} = \left([I]^{\beta}_{\alpha}\right)^{-1}$ e usado que $\left([I]^{\beta}_{\alpha}\right)^{-1} = \left([I]^{\beta}_{\alpha}\right)^{t}$ temos que

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} = [T]^{\alpha}_{\alpha} = [I]^{\beta}_{\alpha}[T]^{\beta}_{\beta}[I]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

4. Rapidinhas (não deixe de justificar): (2,0)

a) Seja $\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. Ache uma base ortogonal β a partir da base α.

b) Os vetores $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$ geram o $\mathbb{R}^5$?

c) Qual é a dimensão do núcleo de T dada por $T\left(\begin{bmatrix} x & y & z & w & r & s \end{bmatrix}^t\right) = x + 2y + 7z + w - 5r + s$?

d) A transformação T dada por $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$ e $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ é injetora?

Solução. a) Se chamarmos $\alpha = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \text{proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \left(\text{proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_3) + \text{proj}_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{v}_3)\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

b) Não. Os vetores $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$ não podem gerar o $\mathbb{R}^5$, pois o mesmo tem dimensão 5 e mesmo que estes 4 vetores fossem LI, eles não seriam suficientes para gerar o $\mathbb{R}^5$.

c) Como $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$ e não é identicamente nula segue que pelo teorema do posto que $6 = \dim \mathbb{R}^6 = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{IM}(T) = x + 1$, logo $x = 5$ que é a dimensão do núcleo de T.

d) Elá não pode ser injetora, pois $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e pelo teorema do posto temos $3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{IM}(T)$, mas o máximo que $\dim \mathcal{IM}(T)$ é 2, portanto, $\dim \mathcal{N}(T) \geq 1$ é daí, $\mathcal{N}(T) \neq \{0\}$. Portanto não pode ser injetora.