Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática

Gabarito da 3ª Prova de Cálculo Aplicado I – Química – 30/11/2011

Faça 5 questões. Escolha e faça apenas uma entre a 4ª e a 4'ª Questão.

1ª Questão Calcule as seguintes integrais.

$a) \int \sqrt[3]{x} + \sqrt{x^3} dx$ $\qquad b) \quad \int x^5\sqrt{1+x^2}dx$ $\qquad c) \quad \int \cos(5v)\text{sen}\,(5v)dv$

Solução. 1 a)

$$\int \sqrt[3]{x} + \sqrt{x^3}\, dx = \int x^{1/3}\, dx + \int x^{3/2}\, dx = \frac{3}{4}x^{4/3} + \frac{2}{5}x^{5/2} + K;$$

1 b) Queremos calcular a $\int x^5\sqrt{1+x^2}dx$ para isto faça $u = x^2+1$ e daí $du = 2xdx$. Além disso, $x^2 = u - 1$ temos

$$\int x^5\sqrt{1+x^2}dx = \int x^2x^2x\sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int (u-1)^2u^{1/2}du$$
$$= \frac{1}{2}\int u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2}\, du = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}u^{7/2} - \frac{4}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2}\right) + k;$$

e portanto,

$$\int x^5\sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{1}{7}(x^2+1)^{7/2} - \frac{2}{5}(x^2+1)^{5/2} + \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + k.$$

1 c) Para calcular $\int \cos(5v)\text{sen}\,(5v)\, dv$ faça $u = 5v$ e daí $du = 5dv$ e lembrando que $\text{sen}\,(2u) = 2\cos(u)\text{sen}\,(u)$ temos

$$\int \cos(5v)\text{sen}\,(5v)\, dv = \frac{1}{5}\int \cos(u)\text{sen}\,(u)du$$
$$= \frac{1}{10}\int \text{sen}\,(2u)\, du = -\frac{1}{20}\cos(2u) + k$$
$$= -\frac{1}{20}\cos(10v) + k.$$

2ª Questão Obtenha o domínio, o contradomínio, as retas assíntotas da função $f(x) = \frac{x^2}{8+x^3}$, calcule as derivadas e faça a interpretação das mesmas e finalmente esboce o gráfico.

Solução. Para que a função$f(x) = \frac{x^2}{8+x^3}$ esteja definida precisamos que o denominador seja não-nulo, isto é, $x^3 + 8 \neq 0$, mas isto é equivalente a $x \neq -2$.

Derivando $f(x)$ temos $f'(x) = \frac{x(16-x^3)}{(8+x^3)^2}$. Precisamos estudar o sinal desta função para descobrirmos os seus pontos críticos e seus intervalos de crescimento e decrescimento. Para isto basta olharmos para o numerador $x(16-x^3)$ e ver que para $x \leq 0$ teremos f' negativa e para $0 \leq x \leq \sqrt[3]{16}$ teremos f' positiva e para $x \geq \sqrt[3]{16}$ ela será negativa novamente.

Vamos calcular $f''(x)$. Então

$$f''(x) = \frac{(16-4x^3)(8+x^3)^2 - (16x-x^4)2(8+x^3)(3x^2)}{(8+x^3)^4}$$
$$= \frac{(16-4x^3)(8+x^3) - 6x^2(16x-x^4)}{(8+x^3)^3},$$

e por expandir e juntando as respectivas potências obtemos $f''(x) = \frac{2(64-56x^3+x^6)}{(8+x^3)^3}$. O numerador $64-56x^3+x^6$ é um polinômio de ordem 6, e portanto par. Para calcular as suas raízes faça $z = x^3$ e ache as raízes de $64-56z+z^2 = 0$. Estas raízes não serão exatas! (aparecem com raízes). Mas depois de encontrar estas raízes basta tirar a raíz cúbica e obtemos as suas raízes $x = 2^{2/3}(7-3\sqrt{5})^{1/3}$ e $x = 2^{2/3}(7+3\sqrt{5})^{1/3}$ do polinômio $64-56x^3+x^6$. E daí $64-56x^3+x^6$ só será negativa para x entre $1,05 \approx 2^{2/3}(7-3\sqrt{5})^{1/3} \le x \le 2^{2/3}(7+3\sqrt{5})^{1/3} \approx 3,8$. E como o denominador esta elevado ao Cubo, Temos que $f''(x)$ será negativa se $x < -2$ e $1,05 \le x \le 3,8$ e nos outros pontos será positiva.

além disso,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{8+x^3} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{8+x^3}$$

e

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2}{8+x^3} = -\infty \text{ e } \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2}{8+x^3} = +\infty.$$

A imagem é todos os reais. Juntando todas estas informações podemos fazer um esboço do gráfico de $f(x)$.

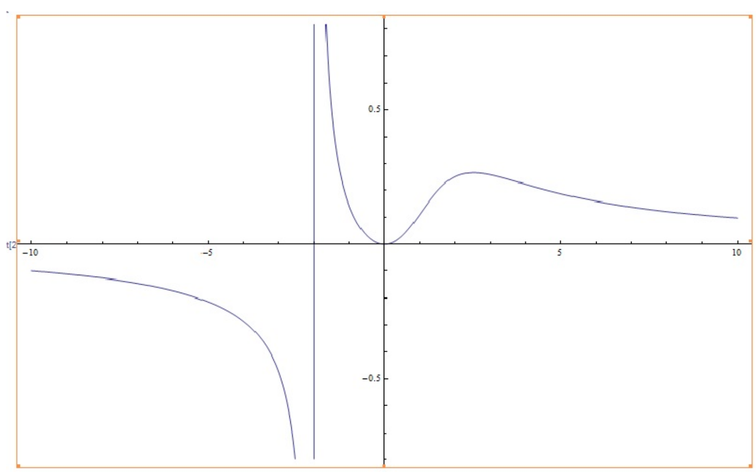

Figura 1: Esboço do gráfico de $\frac{x^2}{8+x^3}$

3ª Questão Encontre a área entre as curvas $y = 2x$ e $y = x^2 - 4x$.

Solução. Para se entender bem o motivo que se monta as integrais é preciso fazer o desenho. Mas como tenho dificuldade em colar ele aqui (não vou colocá-lo) sugiro que você faça o gráfico da região para entender o motivo que escolhemos as integrais.

Começamos por observar que fazer $2x = x^2 - 4$ nos informa os valores de x onde os gráficos se encontram, resolvendo a equação obtemos $x = 0$ e $x = 6$. Vamos dividir a região que queremos calcular a área em três regiões, R_1 região com $0 \le x \le 4$ e acima do eixo x região, R_2 região com $0 \le x \le 4$ e abaixo do eixo x região e por fim R_3 região com $4 \leq x \leq 6$ e abaixo de $y = 2x$ e acima de $y = x^2 - 4x$. Então temos para a região R_1 a integral $\int_0^4 2x\,dx$ e para a região R_2 temos $-\int_0^4 x^2 - 4x\,dx$ e para R_3 temos $\int_4^6 2x - (x^2 - 4x)\,dx$ juntando e integrando todas temos

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 + R_3 &= \int_0^4 2x\,dx + (-\int_0^4 x^2 - 4xdx) + \int_4^6 2x - (x^2 - 4x)\,dx \\ &= \int_0^4 2x - x^2 + 4x\,dx + \int_4^6 2x - (x^2 - 4x)\,dx \\ &= \int_0^6 -x^2 + 6x\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2\right]_0^6 = -\frac{1}{3}6^3 + 3 * 36 = 36. \end{aligned}$$

4ª Questão Um oleoduto tem a forma da curva $y = 1 - x^2$ com $0 \leq x \leq 1$ x e y medidos em quilômetros. Será construída uma cerca tangente à curva $y = 1 - x^2$ no ponto $P \neq (0, 1)$. Determine as coordenadas do ponto P de modo que a área da região triangular formada pela cerca e pelos eixos seja mínima.

Solução. Já havíamos discutido em sala e havíamos obtido o ponto $P = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3})$.

4'ª Questão Encontre as dimensões do cone circular de maior volume que pode ser inscrito em uma esfera de raio r. Calcule o volume desse cone.

Solução. Também já havíamos feito em sala e havíamos obtido o raio r igual a $\frac{2\sqrt{2}r}{3}$ e altura $= \frac{4r}{3}$. E o volume do cone será igual a $\frac{32\pi r^3}{81}$.

5ª Questão Obtenha o polinômio de Taylor de grau 5 da função $f(x) = \ln(x)$ no ponto $x_0 = 1$.

Solução. Depois de derivar $f(x) = \ln(x)$ temos que o polinômio fica

$$\begin{aligned} f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(iv)}(1)}{4!}(x-1)^4 + \frac{f^{(v)}(1)}{5!}(x-1)^5 \\ = 0 + 1(x-1) + \frac{-1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2!}{3!}(x-1)^3 + \frac{-3!}{4!}(x-1)^4 + \frac{4!}{5!}(x-1)^5 \\ = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{1}{5}(x-1)^5. \end{aligned}$$