Universidade Federal Fluminense

VR de Álgebra Linear Aplicada

Prof. Jones Colombo

Aluno(a):____

14/12/2011

1. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 2y + 3z + w \\ x + 3y + 5z - 2w \\ 3x + 8y + 13z - 3w \end{bmatrix}$.

   a) (0,5) Determine $[T]$, a matriz de T com relação às bases canônicas.

   b) (1,0) Encontre uma base para a imagem de T.

   c) (1,0) Determine o núcleo de T.

   d) (0,5) Encontre todos os $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ tal que $T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$.

2. Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   a) (0,5) Mostre que $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$.

   b) (1,0) Determine $[v]_\beta$ se $v = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   c) (0,5) Determine $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$.

3. Mostre que o operador $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -7x + 24y \\ 24x + 7y \end{bmatrix}$ é diagonalizável.

   a) (0,5) Encontre os autovalores de T.

   b) (0,5) Encontre os respectivos autoespaços associados aos respectivos autovalores obtidos no item anterior.

   c) (0,5) Encontre uma base β de autovetores para $\mathbb{R}^2$.

   d) (0,5) É possível obter uma base de autovetores sendo ortonormal? (sim ou não)

   e) (1,0) Determine P invertível tal que $[T] = P^{-1}\,[T]_\beta^\beta\,P$.

4. Faça as duas questões abaixo:

   a) (1,0) Sejam $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. Considere $W = \text{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ escreva o vetor $\mathbf{v}$ como soma de um vetor em W e outro ortogonal a W.

   b) (1,0) Seja $U = \text{Span}\left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. Encontre o vetor w que é a projeção ortogonal de $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ sobre U.

Boa Prova!!!