Universidade Federal Fluminense

Gabarito da VR de Álgebra Linear

Prof. Jones Colombo

14/12/2011

1. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+2y+3z+w \\ x+3y+5z-2w \\ 3x+8y+13z-3w \end{bmatrix}$.

   a) (0,5) Determine $[T]$, a matriz de T com relação às bases canônicas.

   b) (1,0) Encontre uma base para a imagem de T.

   c) (1,0) Determine o núcleo de T.

   d) (0,5) Encontre todos os $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ tal que $T(\mathbf{v}) = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{smallmatrix}\right]$.

Solução 1 *a) Sejam α a base canônica de $\mathbb{R}^4$ e β a base canônica do $\mathbb{R}^3$, então*

$$A = [T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 13 & -3 \end{bmatrix}.$$

b) Calculando os vetores que geram a imagem de T obtemos

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 13 \end{bmatrix} \ e\ T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Então escalonando (linha) a matriz obtemos uma base para a imagem de T.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 5 & 13 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim a $\mathcal{IM}(T) = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$.

c) Sabemos que o Núcleo de T é o espaço solução do sistema homogêneo $A\mathbf{v} = 0$, com $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix}^t$. Logo reduzindo a matriz A a forma escalonada obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 13 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ ou\ \begin{cases} x+2y+3z+w=0 \\ \quad\ \ y+2z-3w=0 \end{cases}$$

As variáveis livres são z e w. Logo, dimensão do núcleo é 2. E

$$\mathcal{N}(T) = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

d) Vamos começar observando que $T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\3\\8\end{bmatrix}$, *então a solução geral do sistema é dado por uma solução particular mais as soluções do sistema homogêneo, portanto,*

$$\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}+\mathcal{N}(T)=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}+\text{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-7\\3\\0\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

2. Considere $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que $T\left(\left[\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right]\right)=\left[\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right], T\left(\left[\begin{smallmatrix}0\\1\\-2\end{smallmatrix}\right]\right)=\left[\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right]$ e $T\left(\left[\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right]\right)=\left[\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right]$.

   a) (0,5) Mostre que $\beta=\left\{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}0\\1\\-2\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right]\right\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$.

   b) (1,0) Determine $[v]_\beta$ se $v=\left[\begin{smallmatrix}2\\-1\\0\end{smallmatrix}\right]$.

   c) (0,5) Determine $T\left(\left[\begin{smallmatrix}2\\-1\\0\end{smallmatrix}\right]\right)$.

Solução 2 *a) Vamos montar uma matriz A, por colocar os vetores da base β nas colunas e então*

$$\det(A)=\det\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&-2&1\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&-2&0\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&1&1\end{bmatrix}=2\neq 0.$$

Se estes vetores formassem os vetores que geram um paralelepípedo, este paralelepípedo teria volume não nulo, e portanto estes vetores são não coplanares.

b) Se α é a base canônica do $\mathbb{R}^3$ precisamos encontrar a matriz $[I]^\alpha_\beta$, mas calcular a matriz $[I]^\beta_\alpha=A$ obtida acima, usando a adjunta podemos obter o inverso desta matriz que é

$$B=[I]^\alpha_\beta=\begin{bmatrix}3/2&-1&-1/2\\1/2&0&-1/2\\-1/2&1&1/2\end{bmatrix}.$$

E portanto calcular $[v]_\beta=[I]^\alpha_\beta[v]_\alpha=\begin{bmatrix}3/2&-1&-1/2\\1/2&0&-1/2\\-1/2&1&1/2\end{bmatrix}\left[\begin{smallmatrix}2\\-1\\0\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}4\\1\\-2\end{smallmatrix}\right]$.

c) Observe que

$$T\left(\left[\begin{smallmatrix}2\\-1\\0\end{smallmatrix}\right]\right)=T\left(4\left[\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right]+\left[\begin{smallmatrix}0\\1\\-2\end{smallmatrix}\right]-2\left[\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right]\right)=4\left[\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right]+\left[\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right]-2\left[\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}4\\1\\-2\end{smallmatrix}\right].$$

3. Mostre que o operador $T\left(\left[\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right]\right)=\left[\begin{smallmatrix}-7x+24y\\24x+7y\end{smallmatrix}\right]$ é diagonalizável.

   a) (0,5) Encontre os autovalores de T.

   b) (0,5) Encontre os respectivos autoespaços associados aos respectivos autovalores obtidos no item anterior.

   c) (0,5) Encontre uma base β de autovetores para $\mathbb{R}^2$.

   d) (0,5) É possível obter uma base de autovetores sendo ortonormal? (sim ou não)

   e) (1,0) Determine P invertível tal que $[T]=P^{-1}\,[T]^\beta_\beta\,P$.

Solução 3 *a) a matriz de T com respeito a base canônica é $A=\left[\begin{smallmatrix}-7&24\\24&-7\end{smallmatrix}\right]$ e calculando o polinômio característico obtemos*

$$\Delta_T(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}-7-\lambda&24\\24&-7-\lambda\end{bmatrix}=\lambda^2-625=(\lambda-25)(\lambda+25).$$

E portanto os autovalores são $\lambda=25$ e $\lambda=-25$.

b) e c) Para $\lambda=25$ temos que encontrar o $\text{Nuc}\begin{bmatrix}-32&24\\24&-32\end{bmatrix}$. *Calculando obtemos $V_{25}=\text{Span}\{\left[\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right]\}$ e para $\lambda=-25$ temos que encontrar* $\text{Nuc}\begin{bmatrix}18&24\\24&18\end{bmatrix}$ *e calculando obtemos $V_{-25}=\text{Span}\left\{\left[\begin{smallmatrix}-4\\3\end{smallmatrix}\right]\right\}$*

d) Sim é possível uma vez que $\left\langle \left[\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}-4\\3\end{smallmatrix}\right]\right\rangle = 0$ *então normalizando obtemos uma base ortonormal*

$$\beta = \left\{ \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}, \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-4\\3\end{bmatrix} \right\}.$$

e) Como β *é uma base ortonormal. Logo a matriz* $[I]^{\beta}_{\alpha} = \begin{bmatrix}3/5 & -4/5\\ 4/5 & 3/5\end{bmatrix}$ *é uma matriz ortogonal. Precisamos calcular* $[I]^{\alpha}_{\beta} = \left([I]^{\beta}_{\alpha}\right)^{-1}$ *e por usar que* $\left([I]^{\beta}_{\alpha}\right)^{-1} = \left([I]^{\beta}_{\alpha}\right)^{t}$ *temos que*

$$\begin{bmatrix}-7 & 25\\ 25 & -7\end{bmatrix} = [T]^{\alpha}_{\alpha} = [I]^{\beta}_{\alpha}[T]^{\beta}_{\beta}[I]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix}3/5 & -4/5\\ 4/5 & 3/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}25 & 0\\ 0 & -25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3/5 & 4/5\\ -4/5 & 3/5\end{bmatrix}.$$

4. Faça as duas questões abaixo:

a) (1,0) Sejam $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}-1\\3\\1\\-2\end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\\1\end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}4\\3\\3\\-1\end{bmatrix}$. Considere $W = \text{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ escreva o vetor $\mathbf{v}$ como soma de um vetor em W e outro ortogonal a W.

b) (1,0) Seja $U = \text{Span}\left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\\2\\2\end{bmatrix} \right\}$. Encontre o vetor w que é a projeção ortogonal de $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\2\\-3\\4\end{bmatrix}$ sobre U.

Solução 4 *a) Verificamos que* $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3\rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\rangle = 0$, *e portanto, este conjunto é ortogonal. Vamos calcular a projeção ortogonal* $\mathbf{v}'$ *de* $\mathbf{v}$ *sobre* W *que é dada por*

$$\mathbf{v}' = \text{proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}) + \text{proj}_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{v}) + \text{proj}_{\mathbf{u}_3}(\mathbf{v}) = \frac{6}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix} + \frac{2}{3}\begin{bmatrix}-1\\3\\1\\-2\end{bmatrix} + \frac{-2}{3}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\4\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Portanto, $\mathbf{v}' \in W$ *é daí*

$$\mathbf{v}'' = \mathbf{v} - \mathbf{v}' = \begin{bmatrix}4\\3\\3\\-1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\4\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\\3\\-1\end{bmatrix}.$$

Daí $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}''$, *com* $\mathbf{v}' \in W$ *e* $\mathbf{v}''$ *esta no complemento ortogonal de* W.

b) Como $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle = 4$ *este conjunto não é ortonormal. Para obtermos a projeção ortogonal do vetor* $\mathbf{v}$ *precisamos ortogonalizar estes vetores, sejam então*

$$\mathbf{u}_1' = \mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{u}_2' = \mathbf{u}_2 - \text{proj}_{\mathbf{u}_1'}(\mathbf{u}_2) = \begin{bmatrix}1\\-1\\2\\2\end{bmatrix} - \frac{4}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-2\\1\\1\end{bmatrix}.$$

E a projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ *sobre é dado por*

$$\text{proj}_{\mathbf{u}_1'}(\mathbf{v}) + \text{proj}_{\mathbf{u}_2'}(\mathbf{v}) = \frac{4}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} + \frac{-3}{6}\begin{bmatrix}0\\-2\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\1/2\\1/2\end{bmatrix}.$$