Universidade Federal Fluminense – UFF

Gabarito da VS de Cálculo Aplicado I – Aplicada dia – 16/12/2011

Faça 5 questões. Escolha e apenas uma entre a 4ª e a 4'ª Questão.

1ª Questão Calcule as seguintes integrais.

$$a) \int xe^x \, \mathrm{d}x. \qquad b) \quad \int \frac{\cos x}{4+\operatorname{sen}^2 x} \, \mathrm{d}x. \qquad c) \quad \int \frac{dv}{\sqrt{v-2}}$$

a) A $\displaystyle\int xe^x \, \mathrm{d}x$ é feita por integração por partes, para isto chame de $u = x \Rightarrow du = dx$ e $dv = e^x \, dx \Rightarrow v = e^x$. Daí,

$$\int xe^x \, \mathrm{d}x = xe^x - \int e^x \, \mathrm{d}x = xe^x - e^x + k.$$

b) Para $\int \frac{\cos x}{4+\operatorname{sen}^2 x} \, \mathrm{d}x$ chame de $2u = \operatorname{sen} x \Rightarrow 2du = \cos x \, \mathrm{d}x$ e temos

$$\int \frac{\cos x}{4+\operatorname{sen}^2 x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{2}{4+4u^2} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+u^2} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \arctan(u) + k = \frac{1}{2} \arctan(\frac{1}{2} \operatorname{sen}(x)) + k.$$

c) Para $\int \frac{dv}{\sqrt{v-2}}$ faça $u = v - 2 \Rightarrow du = dv$ e nossa integral fica

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v-2}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{-1/2} \, du = 2u^{1/2} + k = 2\sqrt{v-2} + k.$$

2ª Questão Obtenha o domínio, a imagem, as retas assíntotas da função $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$, calcule as derivadas e faça a interpretação das mesmas e finalmente esboce o gráfico.

O Domínio de $f(x)$ é

$$\{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\},$$

e a imagem é o conjunto dos Reais menos o intervalo $(0, 1)$.

Observe que $f(-x) = f(x)$, isto é $f(x)$ é par e portanto simétrica em relação ao eixo y.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} \frac{2}{1 - 1/x^2} = 2.$$

E

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x^2}{x^2-1} = \infty \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{2x^2}{x^2-1} = -\infty$$
$$\lim_{x \to -1^+} \frac{2x^2}{x^2-1} = -\infty \quad \lim_{x \to -1^-} \frac{2x^2}{x^2-1} = \infty$$

Conseqüentemente, as retas $x = 1$ e $x = -1$ são assíntotas verticais e $y = 2$ é uma assíntota horizontal.

Além disso,

$$f'(x) = \frac{4x(x^2-1) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

Estudando o sinal de f' obtemos que f' é positiva se $x \leq 0$ e negativa se $x \geq 0$.

Calculando

$$f''(x) = \frac{-4(x^2-1)^2 + 4x \cdot 2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}.$$

Uma vez que $12x^2 + 3 > 0$ para todo x, temos que

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow |x| > 1.$$

e $f''(x) < 0 \Leftrightarrow |x| < 1$. Assim, a curva é côncava para cima nos intervalos $(-\infty, -1)$ e $(1, \infty)$ e côncava para baixo em $(-1, 1)$. Não há pontos de inflexão já que 1 e -1 não estão no domínio de f e por fazer o esboço do gráfico temos

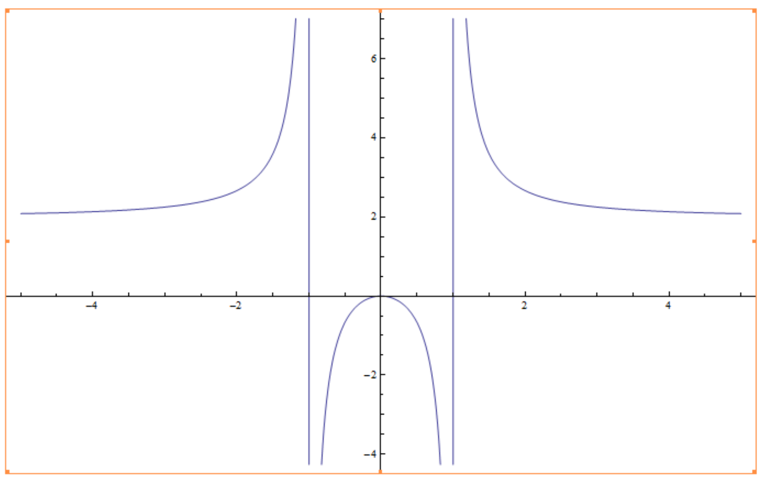

Figura 1: Esboço do gráfico de $\frac{2x^2}{x^2-1}$

3ª Questão Faça o esboço da região compreendida entre as curvas $y = x + 6$, $x = -2y$ e $y = x^3$ e calcule a área dessa região.

Para fazer a região que estamos interessados em calcular precisamos encontrar as intercessões de $y = x+6$, $x = -2y$ ou $y = x+6$, $-x/2 = y$ e resolvendo $x+6 = -x/2$ obtemos $x = -4$ e para obter a intercessão de $y = x+6$ e $y = x^3$ temos que resolver $x + 6 = x^3 \Leftrightarrow x^3 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+3) = 0$ e portanto a única solução é $x = 2$. Veja a figura abaixo

Basta então fazer as seguintes integrais

$$\int_{-4}^{0} x + 6 - (-x/2)\, dx + \int_{0}^{2} x + 6 - x^3\, dx$$

$$= \left[6x + \frac{3x^2}{4}\right]_{-4}^{0} + \left[6x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2} = 12 + 10 = 22.$$

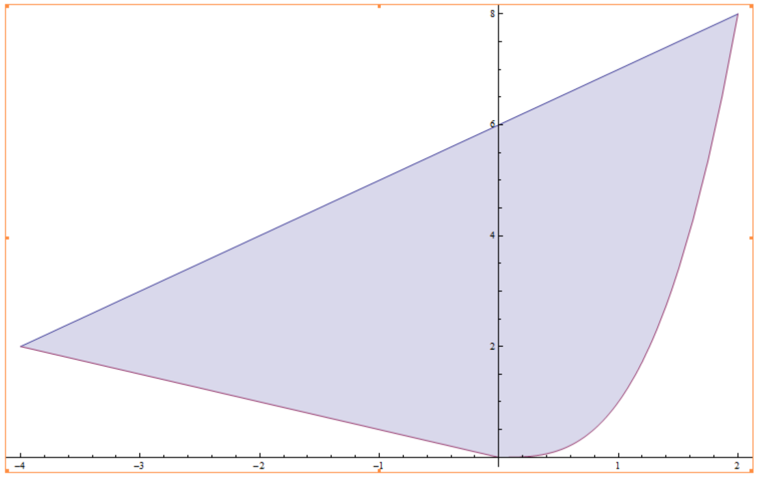

Figura 2: Esboço do Região entre as curvas

4ª Questão Ache raio e a altura de um cilindro circular reto com o maior volume, o qual pode ser inscrito em um cone circular reto com 10cm de altura e 6cm de raio?

Desenhe um cone (com a ponta voltada para cima) Veja a figura abaixo

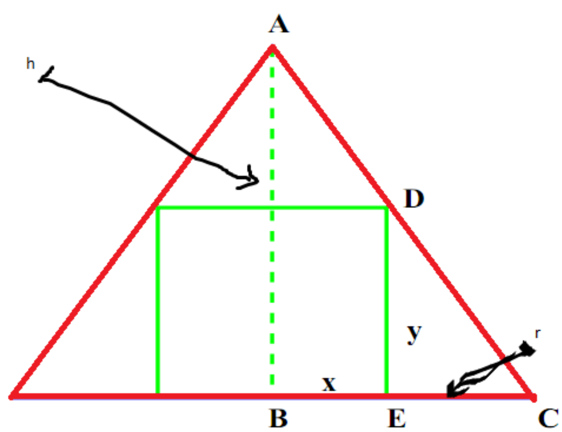

Figura 3: Esquema do cilindro dentro do cone

Sejam r e h o raio e a altura do cone, respectivamente; x e y o raio a altura do cilindro. Por outro lado, o Triângulo ABC é semelhante ao triângulo DEC

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}} \Leftrightarrow \frac{h}{y} = \frac{r}{r-x} \Leftrightarrow y = \frac{h}{r}(r-x).$$

O volume do cilindro é $V = \pi x^2 y$; logo temos maximizar a função:

$$V(x) = \frac{\pi h}{r}(rx^2 - x^3)$$

. Derivando e igualando a zero:

$$V'(x) = \frac{\pi h}{r}(2r - 3x)x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{2r}{3}.$$

Como $h = 10$ e $r = 6$ logo $x = \frac{12}{3} = 4$ e $y = \frac{h}{r}(r-x) = \frac{10}{6}(6-4) = \frac{10}{3}$.

4'ª Questão Um quadro de altura H está pendurado em uma parede vertical de modo que sua borda inferior está a uma altura h do raio de visão horizontal de um observador. A que distância da parede deve colocar-se o observador para que a sua posição seja a mais vantajosa para contemplar o quadro, isto é, para que o ângulo de visão seja máximo?

Ninguém fez esta questão então não darei o gabarito dela.

5ª Questão Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^-}\frac{x+1}{x^2} = \infty.$

(b) No $\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-1)^5}{(3x^2+2x-7)(x^3-9)}$ vamos expandir o numerador e o denominador e temos

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{32x^5-\binom{5}{2}16x^4+\cdots}{3x^5+2x^4-\cdots} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^5}{x^5}\right)\left(\frac{32-\binom{5}{2}16/x+\cdots}{3+2/x-\cdots}\right) = \frac{32}{3}.$$

(c) Como $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b)+\operatorname{sen}(b)\cos(a)$ então

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}(x)}{2x} = \frac{-1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \frac{-1}{2}.$$

(d) No limite $\lim_{x\to\sqrt{3}}\cos\left(\frac{x^2-3}{x-\sqrt{3}}\right)$ basta observar que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\sqrt{3}}\cos\left(\frac{x^2-3}{x-\sqrt{3}}\right) &= \lim_{x\to\sqrt{3}}\cos\left(\frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{x-\sqrt{3}}\right)\\ &= \lim_{x\to\sqrt{3}}\cos\left(x+\sqrt{3}\right) = \cos(2\sqrt{3}).\end{aligned}$$