Universidade Federal Fluminense

Gabarito da VS de Álgebra Linear Aplicada

19/12/2011

1. (2,0 pts) Calcule o $\det(A), \det(A^{-1})$ e o $\det(A^t)$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Precisamos escalonar a matriz para torná-la uma matriz triangular superior. Vamos começar trocando a 1ª e a 3ª linha

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -3 & -2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & -1 & 23 \end{bmatrix}.$$

E vemos que $\det(A) = -4 = \det(A^t)$. Como $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{-4}$.

2. (3,0 pts) Seja $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 + \frac{4}{3}x_3 - x_4 \\ x_1 + \frac{2}{3}x_3 - x_5 \\ 9x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 - 3x_5 \end{bmatrix}$.

a) (0,5) Determine $[T]$, a matriz de T com relação às bases canônicas.

b) (1,0) Determine o núcleo de T.

c) (1,0) Encontre uma base para a imagem de T.

d) (0,5) Encontre todos os $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^5$ tal que $T(\mathbf{v}) = \left[\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ 18 \end{smallmatrix}\right]$.

a) A matriz do operador T com respeito da base canônicas do $\mathbb{R}^5$ e do $\mathbb{R}^3$ é

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4/3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2/3 & 0 & -1 \\ 9 & -3 & 6 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

b) Para determinarmos o núcleo de T, somos obrigado a resolver um sistema de equações e para isto precisamos escalonar a matriz acima, então

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Olhando para a matriz escalonanda temos que

$$\mathcal{N}(T) = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -2/3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

c) Da matriz escalonada acima, vemos que apenas as duas primeiras colunas possuem pivô e portanto,

$$\mathcal{IM}(T) = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}.$$

d) Observe que $T\left(\begin{bmatrix}2\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \left[\begin{smallmatrix}4\\2\\18\end{smallmatrix}\right]$ e portanto a solução geral é

$$\begin{bmatrix}2\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} + \mathcal{N}(T) = \begin{bmatrix}2\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} + \text{Span}\left\{\begin{bmatrix}-2/3\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

3. (3,0 pts) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}4x+y-z\\2x+5y-2z\\x+y+2z\end{bmatrix}$.

(a) (1,0) Sabendo-se que $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 5$ são autovalores de T, encontre bases para os autoespaços de associados a 3 e 5;

(b) (2,0) T é diagonalizável? Justifique a resposta, em caso afirmativo, determine as matrizes P de mudança de base e D diagonal tais que $D = P^{-1}AP$, onde A é a matriz do operador T na base canônica.

a) O autovetor associado ao autovalor 5 é $\left[\begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix}\right]$ e os autovetores associados ao autovalor 3 são: $\left[\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}-1\\1\\0\end{smallmatrix}\right]$.

b) E a matriz P é

$$P = \begin{bmatrix}1&1&-1\\2&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

4. (2,0 pts) Seja $U \subset \mathbb{R}^4$ o subespaço vetorial gerado por $u_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\-2\\1\end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix}4\\3\\0\\-1\end{bmatrix}$ e $u_3 = \begin{bmatrix}0\\-3\\-8\\5\end{bmatrix}$. Considere o vetor $v = \begin{bmatrix}7\\7\\-7\\-7\end{bmatrix}$ e determine o vetor $u \in U$ que é a projeção ortogonal de v sobre o subespaço U.

É fácil de comprovar que $\langle u_1, u_2\rangle \neq 0$ e $\langle u_1, u_3\rangle \neq 0$ e ainda $\langle u_2, u_3\rangle \neq 0$. E portanto, este conjunto de vetores não é ortogonal, para fazer a projeção ortogonal precisamos uma base ortogonal então usando o processo de Gram-Schmitd obtemos

$$\begin{aligned}
v_1 &= u_1\\
v_2 &= u_2 - \text{proj}_{v_1}(u_2) = \begin{bmatrix}4\\3\\0\\-1\end{bmatrix} - \frac{3}{6}\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7/2\\3\\1\\-3/2\end{bmatrix}\\
v_3 &= u_3 - proj_{v_1}(u_3) - proj_{v_2}(u_3) = \begin{bmatrix}0\\-3\\-8\\5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}7/2\\0\\-7\\7/2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-7/2\\-3\\-1\\3/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

E portanto, u_3 é combinação linear dos vetores u_1, u_2 e a projeção de v sobre U é dado por

$$proj_{v_1}(v) + proj_{v_2}(v) = \begin{bmatrix}7/3\\0\\-14/3\\7/3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}7\\6\\2\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}28/3\\6\\-8/3\\-2/3\end{bmatrix}.$$