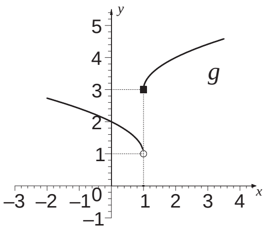
uff Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

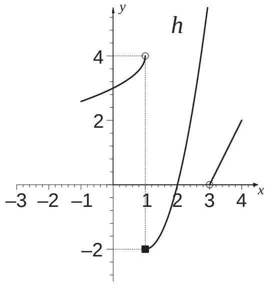
LISTA 3 - 2009-1
Limite e limites laterais
Continuidade

1. Os gráficos de g e h são dados. Ache os limites laterais de f no ponto indicado.

   $f(x) = g(x) \cdot h(x)$
   e
   $f(x) = (h \circ g)(x)$

   ambas no ponto $x = 1$





2. Dadas as funções $f(x) = \begin{cases} x^2+3 & \text{se } x \le 1 \\ x+1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \le 1 \\ 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$,

   (i) Esboce o gráfico de f e g;
   (ii) Calcule $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$;
   (iii) Dê a expressão da função $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ e verifique se existe $\lim\limits_{x\to 1} F(x)$.

3. Dê um exemplo no qual $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)|$ existe, mas $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ não existe.

4. Se $f(x) > 0$ para todo $x \neq 2$ e $f(2) = -3$, verifique se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas. Caso seja verdadeira, apresente uma justificativa. Caso seja falsa, apresente um contra-exemplo.
   (a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ não existe (b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -3$ (c) Se existir, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ é positivo

5. Sabe-se que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$ e f é definida em $\mathbb{R}$. Todas as afirmativas abaixo são falsas. Tente desenhar um contra-sxemplo para cada uma delas.
   (a) $f(x) > 0$ para $x \in (1,3)$ (b) $f(2) = 5$ (c) $f(2)$ é positivo

Nos exercícios 6. a 11. calcule o limite, caso exista. Caso não exista, justifique.

6. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{2x^2+5x-3}{2x^2-5x+2}$

7. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{3\left(1-x^2\right)-2\left(1-x^3\right)}{\left(1-x^3\right)\left(1-x^2\right)}$

8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(x+1)}{x}$

9. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{x}$

10. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{1+\sqrt[3]{3x-1}}$

11. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-5x+4}{|x-1|}$

Nos exercícios 12. a 14. verifique se a função dada é contínua nos pontos indicados. Justifique a resposta.

12. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & , \quad x \neq 1 \\ 2 & , \quad x = 1 \end{cases}$ em $x = 1$

13. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^6+x^2+2}$ em qualquer $x \in \mathbb{R}$

14. $f(x) = \dfrac{1}{2}(x-1)\big[|x|\big]$, para $-2 \le x \le 2$,
    onde $\big[|x|\big]$ = maior inteiro que não supera x.
    Pontos $x = 0$ e $x = 1$.
    (Sugestão: esboce o gráfico de f)

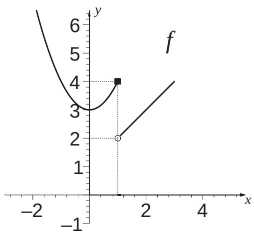
15. Para a função f definida por $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{2-x} & , \quad x < 1 \\ ax+b & , \quad 1 \le x < 2 \\ \left|x^2-7x+12\right| & , \quad x \ge 2 \end{cases}$
    (a) Determine os valores de a e b para que f seja contínua em $\mathbb{R}$ (b) Esboce o gráfico de f.

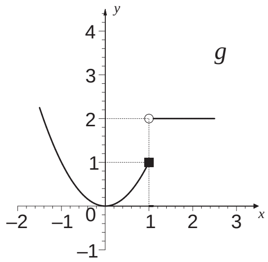
16. Dê um exemplo com duas funções f e g tais que f seja contínua em $x = 0$, g seja descontínua em $x = 0$ e no entanto $f \cdot g$ seja contínua em $x = 0$.

RESPOSTAS

1. $\lim_{x\to 1^-} g(x)\cdot h(x) = 4$ $\quad \lim_{x\to 1^+} g(x)\cdot h(x) = -6$ $\quad \lim_{x\to 1^-} (h\circ g)(x) = -2$ $\quad \lim_{x\to 1^+} (h\circ g)(x) = 0$

2. i)





ii) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 4$ $\quad \lim_{x\to 1^-} g(x) = 1$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$ $\quad \lim_{x\to 1^+} g(x) = 2$

iii) $F(x) = \begin{cases} \left(x^2+3\right)x^2 & , \quad x \le 1 \\ 2(x+1) & , \quad x > 1 \end{cases}$

$\lim_{x\to 1} F(x) = 4$

3. $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

4. (a) Falso (b) Falso (c) Falso. Contra-exemplo: $f(x) = \begin{cases} |x-2| & \text{se} \quad x \ne 2 \\ -3 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$ $\qquad \lim_{x\to 2} f(x) = 0$

6. $-\dfrac{7}{3}$ $\qquad$ 7. $\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ 8. -2 $\qquad$ 9. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}$ $\qquad$ 10. $\dfrac{1}{3}$

11. $f(x) \to 3 \quad \text{se} \quad x \to 1^- \quad \text{e} \quad f(x) \to -3 \quad \text{se} \quad x \to 1^+$, portanto o limite não existe

12. Não, pois $\lim_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{2} \ne 2 = f(1)$

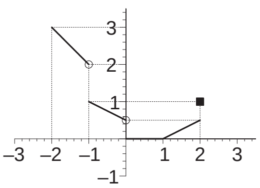
13. Sim, é contínua em $\mathbb{R}$.

    O denominador nunca se anula pois $x^6 + x^2 \ge 0 \Rightarrow x^6 + x^2 + 2 \ge 2 > 0$. Analogamente, o radicando $y = x^2 + 1 > 0$. Logo o domínio de f é igual a $\mathbb{R}$.

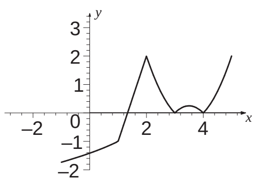
    Assim basta verificar se as funções do numerador e denominador são contínuas para todo $x \in \mathbf{R}$, pois sabemos que o quociente de funções contínuas é uma função contínua.

    Verificando:

    A função do denominador é contínua em $\mathbb{R}$ pois é uma função polinomial (qualquer função polinomial é contínua em $\mathbb{R}$). A função do numerador é a composição de duas funções: a função raiz e uma função polinomial. Como a função raiz é contínua em $[0,\infty)$, em particular é contínua em $(0,\infty)$, isto é, neste caso $\forall x \in \mathbb{R},\ y = x^2 + 1 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ y \in (0,\infty) \Rightarrow \sqrt{y}$ é contínua em $(0,\infty)$. Como a a composta de contínuas é contínua, a função do numerador é contínua.

14.  é contínua em $x = 1$ e descontínua em $x = 0$

15. (a) $a = 3$ e $b = -4$



16. $f(x) = |x|$ e $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & , \quad x \ne 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$