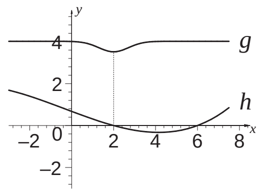
Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

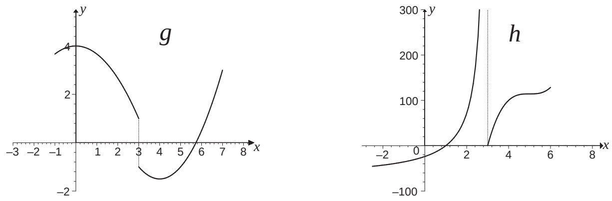
LISTA 4 - 2009-1
Limite infinito e no infinito
Teoremas do confronto e anulamento
Limites trigonométricos

Nos exercícios 1. a 4. os gráficos de g e h são dados. Ache os limites laterais de f no ponto indicado.

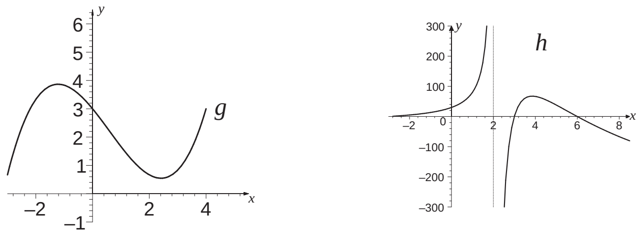
1. $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, no ponto $x = 2$



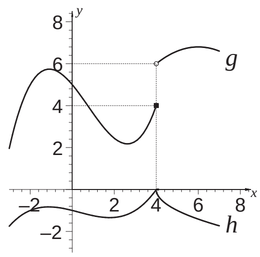
2. $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, no ponto $x = 3$



3. $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, no ponto $x = 2$



4. $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ e $f(x) = (g \circ h)(x)$
ambas no ponto $x = 4$



Nos exercicíos 5. a 10. calcule o limite, caso exista. Caso não exista, justifique.

5. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(x^n - x^{n-1}\right)$

6. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)(x+2)\cdots(x+10)}{\left(x^2+1\right)^5}$

7. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}{x+1}$

8. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}\right)$

9. $\displaystyle\lim_{x \to -1} \left(\frac{3}{x+1} - \frac{5}{x^2-1}\right)$

10. $\displaystyle\lim_{x \to 5} \left(\frac{\sqrt{25 - x^2}}{x-5}\right)$

11. Seja f definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 + 5x^2 + 7x + 3} & \text{se } \; x \neq -3, \; x \neq -1 \\ 0 & \text{se } \; x = -3 \\ -1/2 & \text{se } \; x = -1 \end{cases}$

(a) A função f está definida em $\mathbb{R}$? Justifique.
(b) Dê os pontos onde f é contínua. Justifique.
(c) Dê os pontos onde f é descontínua. Justifique.
(d) A função f é contínua em $\mathbb{R}$? Justifique.

Nos exercícios 12. a 15. determine as equações das assíntotas verticais e horizontais do gráfico da função dada.

12. $f(x) = \dfrac{3x}{x-1}$

13. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$

14. $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{2x^2-3x}$

15. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

16. A função f é tal que para $x \neq 2$, f satisfaz $1 + 4x - x^2 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 9$. Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 2} f(x)$.

17. Seja f uma função limitada. Use o teorema do anulamento (é o corolário do teorema do confronto) para provar que $\lim\limits_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$.

18. Sabendo que para $x > 1$, $f(x)$ satisfaz $(x-1)^2 < \left(x^2-1\right)\cdot f(x) < (x+1)^2$, calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Nos exercicíos 19. a 27. calcule o limite, caso exista. Caso não exista, justifique.

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x^3}{x}$

20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(\pi x)}{\tan x}$

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2\left(ax^2\right)}{x^4}$

22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(ax)}{x^2}$

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sec x}{x^2}$

24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(5x)}{\tan(2x)\tan(4x)\tan(6x)}$

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\operatorname{sen} x}}{x^3}$

26. $\lim\limits_{x\to 0} \left(x\cos\dfrac{1}{x}\right)$

27. $\lim\limits_{x\to -2} \left(x^2-4\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x+2}\right)$

28. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\cos x}{x}$

29. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+x\operatorname{sen} x}{x}$

30. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\operatorname{sen} x$

Nos exercícios 31. a 33. verifique se a função dada tem extensão contínua a toda reta $\mathbb{R}$.

31. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 4x}{x}$

32. $f(x) = \dfrac{-1+\operatorname{sen} x}{x-\pi/2}$

33. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(x^2-4\right)}{x+2}$

RESPOSTAS

1. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$
2. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$
3. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 0$
4. $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{g(x)}{h(x)} = \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{g(x)}{h(x)} = -\infty$
   $\lim\limits_{x\to 4^-} (g\circ h)(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} (g\circ h)(x) = 5$
5. $\nexists$, pois quando $x\to+\infty$ a função $\to+\infty$
6. 1
7. -1
8. $-\dfrac{3}{2}$
9. $\nexists$, pois a função $\to -\infty$ se $x\to -1^-$
   (ou, a função $\to +\infty$ se $x\to -1^+$)
10. $\nexists$, pois a função $\to -\infty$ se $x\to 5^-$.
    Obs.: $\nexists x; x\to 5^+$, pois neste caso $-5\le x<5$.

11. (a) Sim, pois a única restrição da expressão é o denominador não nulo, os únicos pontos que anulam o denominador são $x=-1$ e $x=-3$ e nestes pontos a função foi definida por outras expressões, a saber $f(-1) = -1/2$ e $f(-3) = 0$.
(b) Em $\mathbb{R}-\{-3,-1\}$ a função é contínua pois é o quociente de funções polinomiais e toda função polinomial é contínua. Em $x=-1$ a função é contínua pois $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\dfrac{1}{2} = f(-1)$.
(c) A função é descontínua em $x=-3$ pois $f(x)\to+\infty$ se $x\to -3^-$ (outra justificativa seria $f(x)\to-\infty$ se $x\to -3^+$, basta não ter um dos limites laterais).
(d) Não, pois não é contínua em $x=-3$.

12. V: $x=1$; H: $y=3$
13. V: não tem; H: $y=-2$, $y=2$
14. V: $x=0$, $x=\dfrac{3}{2}$; H: $y=1$
15. V: $x=-2$, $x=2$; H: $y=-1$, $y=1$
16. 5

17. (i) Para $g(x)=x^2$ e $a=0$, temos $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$
    (ii) f é limitada, isto significa que $\exists M; |f(x)|\le M$.
    Assim, as duas hipóteses (i) e (ii) do teorema do anulamento se verificam. Logo vale a tese do teorema, a saber $\lim\limits_{x\to a} g(x)f(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$.

18. 1
19. 0
20. π
21. a^2
22. $\dfrac{a^2}{2}$
23. $-\dfrac{1}{2}$
24. $\dfrac{5}{16}$
25. $\dfrac{1}{4}$
26. 0
27. 0
28. 1

29. $\nexists$, oscila entre -1 e 1
30. $\nexists$, oscila entre $-\infty$ e $+\infty$

31. Sim, $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}^2 4x}{x} & , \ x\neq 0 \\ 0 & , \ x=0 \end{cases}$

32. Sim, $g(x) = \begin{cases} \dfrac{-1+\operatorname{sen} x}{x-\pi/2} & , \ x\neq \pi/2 \\ 0 & , \ x=\pi/2 \end{cases}$

33. Sim, $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\left(x^2-4\right)}{x+2} & , \ x\neq -2 \\ -4 & , \ x=-2 \end{cases}$