uff Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

**LISTA 6 - 2009-1**
Derivada por definição
Regras básicas de derivação
Diferenciabilidade $\times$ continuidade

Nos exercícios 1. a 3. use a definição de derivada de uma função para calcular $f'(x_0)$ e determine a equação da reta tangente ao gráfico da função no ponto $(x_0, f(x_0))$.

1. $f(x) = \sqrt{x^2+4}, \quad x_0 = \sqrt{5}$  2. $f(x) = \dfrac{x+4}{x+2}, \quad x_0 = 0$  3. $fx) = \dfrac{1}{x}, \quad x_0 = \dfrac{1}{2}$

4. Quantas retas tangentes ao gráfico de $y = x^3 + 3x$ são paralelas à reta $y = 6x + 1$? Determine as equações dessas tangentes.

5. Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x}{2} & , \ x < 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & , \ x \geq 1 \end{cases}$ $f$ é diferenciável em $x = 1$? $f$ é contínua em $x = 1$?

6. Seja $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} & , \ x < 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & , \ x \geq 1 \end{cases}$ $f$ é diferenciável em $x = 1$? $f$ é contínua em $x = 1$?

7. Determine $a$ e $b$ de modo que $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \ x < 1 \\ ax + b & \text{se} \ x \geq 1 \end{cases}$ seja diferenciável.

8. Seja $f$ tal que $|f(x)| \leq x^2, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Mostre que $f$ é diferenciável em $x = 0$.

Derive cada função dos exercícios 9. a 17. (se possível, simplifique a função e/ou a derivada da função)

9. $f(x) = 2\left(x^2 + 2x + 1\right) \tan x$
10. $f(x) = \cos^2 x$
11. $f(x) = \sqrt{x} \ \operatorname{sen} x + x^{1/3}$
12. $f(x) = 2x \cos x \tan x$
13. $f(x) = \dfrac{x \sec x}{x^2 + 2x + 3}$
14. $f(x) = \dfrac{\left(x^2 - 2x + 2\right)^2}{x^4 + x^2 + 1}$
15. $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+2)^2}$
16. $f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen}(1/x) & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$
17. $f(x) = |2x - 8|, \quad x \neq 4$

Nos exercícios 18. a 21. use o gráfico da função para determinar os valores de $x$ em que a função é diferenciável e indique os valores de $x$ em que a derivada é (i) nula (ii) positiva (iii) negativa.

18. $f(x) = |x+3|$  19. $f(x) = |x^2 - 9|$  20. $f(x) = \sqrt{|x|}$  21. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & , \ x \leq 0 \\ 4 - x^2 & , \ x > 0 \end{cases}$

RESPOSTAS

1. $f'\left(\sqrt{5}\right) = \lim\limits_{x \to \sqrt{5}} \dfrac{\sqrt{x^2+4} - 3}{x - \sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$; reta tangente: $y - 3 = \dfrac{\sqrt{5}}{3}\left(x - \sqrt{5}\right)$
2. $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$; reta tangente: $y = -\dfrac{x}{2} + 2$  3. $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = -4$; reta tangente: $y = -4x + 4$
4. Duas retas tangentes: $y = 6x - 2$ e $y = 6x + 2$

5. $f$ é diferenciável em $x = 1$ pois $f'(1) = -1/2$; $f$ é contínua em $x = 1$, pois tem um teorema que garante que toda função diferenciável num ponto é contínua nesse ponto.

6. $f$ não é contínua em $x = 1$, pois $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\dfrac{1}{2} \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$; $f$ não é diferenciável em $x = 1$ pois se fosse, $f$ seria contínua em $x = 1$ (tem um terorema que garante que toda função diferenciável num ponto é contínua nesse ponto) e já provamos que $f$ não é contínua em $x = 1$.

7. $a = 2$ e $b = -1$

8. Use o teorema do sanduíche para calcular a derivada pela definição

9. $f'(x) = 2\left(x^2 + 2x + 1\right)\sec^2 x + 2(2x+2)\tan x = 2(x+1)\left[(x+1)\sec^2 x + 2\tan x\right]$

10. $f'(x) = -2\cos x \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} 2x$

11. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{sen} x + \sqrt{x}\cos x + \dfrac{1}{3}x^{-2/3} = \dfrac{\operatorname{sen} x + 2x\cos x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

12. $f(x) = 2x\cos x\tan x = 2x\operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = 2(\operatorname{sen} x + x\cos x)$

13. $f'(x) = \dfrac{\left(x^2+2x+3\right)(x\sec x\tan x + \sec x) - [x(\sec x)(2x+2)]}{\left(x^2+2x+3\right)^2} = \dfrac{\left[3 - x^2 + \left(x^3+2x^2+3x\right)\tan x\right]\sec x}{\left(x^2+2x+3\right)^2}$

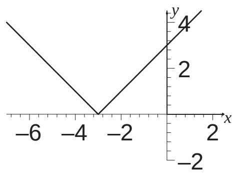
14. $f'(x) = \dfrac{\left(x^4+x^2+1\right)\left[2\left(x^2-2x+2\right)(2x-2)\right] - \left(x^2-2x+2\right)^2\left(4x^3+2x\right)}{\left(x^4+x^2+1\right)^2} =$

$$= \frac{2\left(x^2-2x+2\right)\left(2x^4-3x^3-2\right)}{\left(x^4+x^2+1\right)^2}$$

15. $f'(x) = -2\left(x^2+2\right)^{-3}(2x) = \dfrac{-4x}{\left(x^2+2\right)^3}$

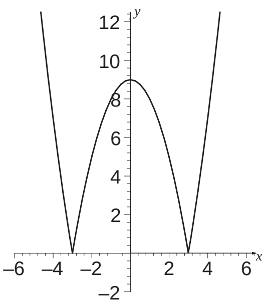
16. $f'(x) = \begin{cases} -x\cos\dfrac{1}{x} + 3x^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$

17. $x \neq 4,\ f(x) = |2x-8| = \begin{cases} -2x+8 & \text{se} \quad x < 4 \\ 2x-8 & \text{se} \quad x > 4 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{se} \quad x < 4 \\ 2 & \text{se} \quad x > 4 \end{cases} = \dfrac{2(x-4)}{|x-4|}$

18. 

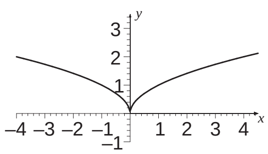
$f(x) = |x+3|$ não é diferenciável em $x = -3$ pois o gráfico tem um bico no ponto $(-3, f(-3)) = (-3, 0)$. É diferenciável em $\mathbb{R} - \{-3\}$.

(i) $\nexists x$ tal que $f'(x) = 0$
(ii) $f'(x) > 0: \ x \in (-3, \infty)$ (iii) $f'(x) < 0: \ x \in (-\infty, -3)$

19. 

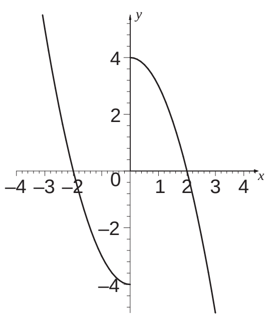
$f(x) = |x^2 - 9|$ não é diferenciável em $x = \pm 3$ pois o gráfico tem um bico nos pontos $(-3, f(-3)) = (-3, 0)$ e $(3, f(3)) = (3, 0)$ . É diferenciável em $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$.

(i) $f'(x) = 0$: $x = 0$
(ii) $f'(x) > 0: \ x \in (-3, 0) \cup (3, \infty)$ (iii) $f'(x) < 0: \ x \in (-\infty, -3) \cup (0, 3)$

20. 

$f(x) = \sqrt{|x|}$ não é diferenciável em $x = 0$ pois o gráfico tem um bico no ponto $(0, f(0)) = (0, 0)$. É diferenciável em $\mathbb{R} - \{0\}$.

(i) $\nexists x$ tal que $f'(x) = 0$
(ii) $f'(x) > 0: \ x \in (0, \infty)$ (iii) $f'(x) < 0: \ x \in (-\infty, 0)$

21. 

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & , \ x \leq 0 \\ 4 - x^2 & , \ x > 0 \end{cases}$ não é contínua em $x = 0$ pois o gráfico tem um salto em $x = 0$, logo $f(x)$ não é diferenciável em $x = 0$. É diferenciável em $\mathbb{R} - \{0\}$.

(i) $\nexists x$ tal que $f'(x) = 0$
(ii) $\nexists x$ tal que $f'(x) > 0$ (iii) $f'(x) < 0: \ x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$