Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 7 - 2009-1
Algumas aplicações de derivada
Regra da cadeia

1. Uma partícula se move sobre uma linha reta de acordo com a equação $s = \sqrt{t}$, sendo s a distância (em metros) da partícula ao seu ponto de partida, após decorridos t segundos da partida.
   (a) Calcule a velocidade média da partícula de $t = 9$ até $t = 16$
   (b) Calcule a velocidade instantânea da partícula quando $t = 9$.
2. Calcule a taxa de variação do volume de um balão esférico em relação ao seu raio, quando o raio do balão for igual a 5 cm.
3. Um projétil é lançado verticalmente para cima e t segundos após o lançamento está a s metros do solo, onde $s = s(t) = 256\,t - 16t^2$. Calcule:
   (a) A velocidade do projétil 4 segundos após o lançamento;
   (b) O tempo necessário para o projétil atingir a altura máxima;
   (c) A altura máxima atingida pelo projétil.
4. No instante t horas um veículo está $16\sqrt{t^3} - 24t + 16$ quilômetros à leste de um ponto de referência na estrada.
   (a) Qual a velocidade no instante $t = \frac{1}{4}$ e qual é o sentido do movimento em relação ao ponto de referência?
   (b) Onde está o veículo quando a velocidade é zero?

Nos exercícios 5. a 10. derive a função (se possível, simplifique antes e/ou depois de derivar).

5. $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{2x^4 + 2x}}{\cos^2 x}$
6. $f(x) = (\operatorname{sen} 2x)\left(x^3 + 2x\right)^{2/3}$
7. $F(u) = \dfrac{u^3 - 3u^2}{\left(u^4 + 1\right)^{5/2}}$
8. $G(r) = \sqrt[5]{\dfrac{2r^2 - 2}{r - 1}}$
9. $M(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$
10. $f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^4} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$
11. Sejam $f(x) = \sqrt{2x + 1}$ e $g(x) = \sqrt{\tan x}$. Calcule $(f \circ g)'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.
12. Considere f uma função diferenciável e g definida por $g(x) = f^2(\cos x)$.
    Sabendo que $f(0) = 1$ e $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$, calcule $g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.
13. Seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável; $g(0) = \dfrac{1}{2}$ e $g'(0) = 1$.
    Calcule $f'(0)$, onde $f(x) = (\cos x) g^2\left(\tan \dfrac{x}{x^2 + 2}\right)$.
14. Sejam g diferenciável e $f(x) = x\; g\left(x^2\right)$.
    (a) Mostre que $f'(x) = g\left(x^2\right) + 2x^2 g'\left(x^2\right)$;
    (b) Calcule $g(4)$, sabendo que $g(4) + g'(4) = 1$ e $f'(2) = -1$.
15. Considere as funções $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x < -1 \\ |x| & \text{se} \quad x \geq -1 \end{cases}$ e $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 - x^2 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$
    (a) Encontre $(f \circ g)(x)$; (b) Usando (a), encontre $(f \circ g)'(x)$ e determine seu domínio D;
    (c) Determine o conjunto C onde podemos aplicar a regra da cadeia para calcular $(f \circ g)'(x)$;
    (d) Usando a regra da cadeia, encontre $(f \circ g)'(x)$, $\forall x \in C$;
    (e) Compare (b) e (d); (f) Esboce os gráficos de g, f e $f \circ g$;
    (g) Indique nos gráficos os pontos onde g, f e $f \circ g$ não são diferenciáveis.

RESPOSTAS

1. (a) $\dfrac{\sqrt{16}-\sqrt{9}}{16-9}$; (b) $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\sqrt{9+\Delta t}-\sqrt{9}}{\Delta t} = s'(9) = \dfrac{1}{6}$ m/seg.

2. Sendo V = volume, $V'(5) = 100\pi$ cm^3/cm.

3. (a) 128 m/seg; (b) 8 seg (c) 1024 m

4. (a) $s'(1/4) = -12 < 0 \Rightarrow$ sentido: veículo se aproxima da referência, rumo oeste, com velocidade escalar de 12 km/h; (b) 8 km à leste da referência.

5. $f'(x) = \dfrac{(\cos^2 x)\,(1/4)\left(2x^4+2x\right)^{-3/4}(8x^3+2) - \left(2x^4+2x\right)^{1/4}(2\cos x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^4 x} = \dfrac{\left(4x^3+1\right)\cos x + 8\left(x^4+1\right)\operatorname{sen} x}{2\,(2x^4+2x)^{3/4}\cos^3 x}$

6. $f'(x) = (\operatorname{sen} 2x)(2/3)\left(x^3+2x\right)^{-1/3}\left(3x^2+2\right) + (\cos 2x)(2)\left(x^3+2x\right)^{2/3} = \dfrac{2\left(3x^2+2\right)(\operatorname{sen} 2x) + 6\left(x^3+2x\right)(\cos 2x)}{3\,(x^3+2x)^{1/3}}$

7. $F'(u) = \dfrac{\left(u^4+1\right)^{5/2}\left(3u^2-6u\right) - \left(u^3-3u^2\right)(5/2)\left(u^4+1\right)^{3/2}\left(4u^3\right)}{\left(u^4+1\right)^5} = \dfrac{-7u^6+24u^5+3u^2-6u}{\left(u^4+1\right)^{7/2}}$

8. $G'(r) = \dfrac{1}{5}(2r+2)^{-4/5}(2) = \dfrac{2}{5\sqrt[5]{(2r+2)^4}}$

9. $f'(x) = \dfrac{1+\dfrac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

10. $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x^4} - \dfrac{4}{x^2}\cos\dfrac{1}{x^4} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$

11. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

12. 1

13. $\dfrac{1}{2}$

14. $\dfrac{9}{7}$

15. (a) $(f\circ g)(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 1-x^2, & x \geq -1 \end{cases}$

(b) $(f\circ g)'(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ -2x, & x > -1 \end{cases}$ $\nexists (f\circ g)'(-1)$ pois $(f\circ g)'_-(-1) = 0 \neq (f\circ g)'_+(-1) = 2$

$D = \operatorname{dom}(f\circ g)' = \mathbb{R} - \{-1\}$

(c) $g'(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ -1, & -1 < x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ $\nexists\, g'(-1)$ pois $g'_-(-1) = 0 \neq g'_+(-1) = -1$ e $\nexists\, g'(0)$ pois $g'_-(0) = -1 \neq g'_+(0) = 1$. Logo dom $(g') = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$

$f'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -2x, & x \geq 0 \end{cases}$ Logo dom $(f'\circ g) = \{x \in (\operatorname{dom} g) = \mathbb{R};\ y = g(x) \in (\operatorname{dom} f') = \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

Como $C = (\operatorname{dom}(f'\circ g)) \cap (\operatorname{dom}(g'))$, temos $C = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$.

(d) Visando aplicar a regra da cadeia, vamos calcular primeiro $f'(g(x))$ em $C = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$:

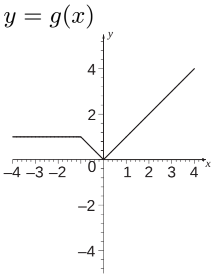
Como $g(x) = \begin{cases} 1, & x < -1 \\ |x|, & -1 < x < 0 \\ |x|, & x > 0 \end{cases}$ temos $f'(g(x)) = \begin{cases} f'(1) = -2, & x < -1 \\ f'(|x|) = -2|x| = 2x, & -1 < x < 0 \\ f'(|x|) = -2|x| = -2x, & x > 0 \end{cases}$.

Aplicando a regra da cadeia: $(f\circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = \begin{cases} -2\times 0 = 0, & x < -1 \\ (2x)\times(-1) = -2x, & -1 < x < 0 \\ (-2x)\times(1) = -2x, & x > 0 \end{cases}$

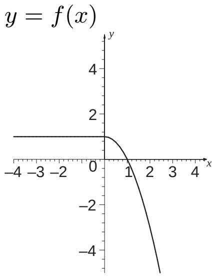
(e) $(f\circ g)'(x)$ são iguais nos pontos comuns de D e C, mas não é possível aplicar a regra da cadeia para calcular $(f\circ g)'(0)$.

(f)

$y = g(x)$



$y = f(x)$



$y = (f\circ g)(x)$