

UFF Universidade Federal Fluminense
 EGM - Instituto de Matemática
 GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 10 - 2009-1
 Funções inversas
 Teorema da Função Inversa
 Funções trigonométricas inversas

1. Seja $f(x) = \frac{1}{x} - x^3$, $x > 0$.

- (a) Mostre que f tem inversa em $(0, \infty)$; (b) Calcule $f^{-1}(0)$ e $(f^{-1})'(0)$;
 (c) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto $(0, f^{-1}(0))$.

2. Sendo f uma função invertível, derivável, tal que $f(1) = 2$, $f(2) = 7$, $f'(1) = 3$ e $f'(2) = 4$, calcule $(f^{-1})'(2)$.

3. Seja $f(x) = \begin{cases} 1 - x^3, & x \leq 0 \\ 1 - x^2, & x > 0 \end{cases}$. Se f^{-1} existir, calcule $(f^{-1})'(x)$ e esboce os gráficos de f e f^{-1} .

Resolva as equações dos exercícios 4. a 11.

4. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 6. $\sin x = -\frac{1}{2}$ 8. $\tan x = 0$ 10. $\tan x = -1$
 5. $\cos x = 0$ 7. $\cos x = -1$ 9. $\tan x = 1$ 11. $\sec x = -2$

Nos exercícios 12. a 19. encontre o valor de x .

12. $x = \arcsen \frac{\sqrt{3}}{2}$ 14. $x = \arcsen -\frac{1}{2}$ 16. $x = \arctan 0$ 18. $x = \arctan -1$
 13. $x = \arccos 0$ 15. $x = \arccos -1$ 17. $x = \arctan 1$ 19. $x = \operatorname{arcsec} -2$

Deduzas as fórmulas dos exercícios 20. a 22.

20. $\operatorname{arcsec} x - \arccos \frac{1}{x} = 0$ 21. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ 22. $\cos(\arcsen x) = \sqrt{1-x^2}$

Nos exercícios 23. e 24. derive a função.

23. $f(x) = \arcsen^3((x+1)^2) + \arccos \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
 24. $g(x) = \arctan \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

Nos exercícios 25. e 26. encontre y' , se $y = y(x)$ é definida implicitamente pela equação dada.

25. $x \arctan y = x^2 + y^2$ 26. $\arcsen(xy) = x + y$

Nos exercícios 27. a 29. verifique a igualdade.

27. $\frac{d}{dx} \left(\frac{x^3}{3} \arcsen x + \frac{x^2+2}{9} \sqrt{1-x^2} \right) = x^2 \arcsen x$
 28. $\frac{d}{dx} \left(\arctan \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$
 29. $\frac{d}{dx} \left(\arctan \frac{2 \tan x}{1-\tan^2 x} \right) = 2$

30. Seja $f(x) = 2(x^2 + 1) \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$.

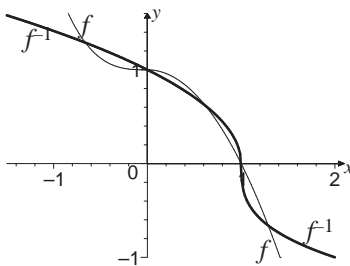
- (a) Mostre que f é invertível;
 (b) Verifique que $f(-1) = -\pi$ e calcule $(f^{-1})'(-\pi)$;

RESPOSTAS

1. (a) Como $f'(x) = -\frac{1+3x^4}{x^2} < 0$ em $(0, \infty)$,
 f satisfaz as hipóteses do TFI
 (teorema da função inversa).
 Logo f é invertível em $(0, \infty)$;
 (b) $f^{-1}(0) = 1$ e $(f^{-1})'(0) = -1/4$;
 (c) $x + 4y = 4$

2. $\frac{1}{3}$

3. $(f^{-1})'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}, & x > 1 \\ \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}, & x < 1 \end{cases}$



4. $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

5. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

6. $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

7. $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

8. $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

9. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

10. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

11. $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

12. $x = \frac{\pi}{3}$

13. $x = \frac{\pi}{2}$

14. $x = -\frac{\pi}{6}$

15. $x = \pi$

16. $x = 0$

17. $x = \frac{\pi}{4}$

18. $x = -\frac{\pi}{4}$

19. $x = \frac{2\pi}{3}$

20. Sabemos que $y = \operatorname{arcsec} x \Leftrightarrow \sec y = x, 0 \leq y < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2} < y \leq \pi \Leftrightarrow \frac{1}{\cos y} = x, 0 \leq y < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2} < y \leq \pi \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \cos y$. Substituindo a primeira e a última relação na equação dada, obtemos $y - \arccos(\cos y) = y - y = 0$.

21. Deduzida em aula.

22. Sabemos que $y = \arcsen x \Leftrightarrow \sen y = x, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Por outro lado, $\cos y = \pm\sqrt{1 - \sen^2 y}$, mas no intervalo considerado $\cos y \geq 0$, logo $\cos(\arcsen x) = \cos y = \sqrt{1 - \sen^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$.

23. $f'(x) = 3 \arcsen^2((x+1)^2) \frac{2(x+1)}{\sqrt{1-(x+1)^4}} + \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2+1}}} \cdot \frac{-1}{2} (x^2+1)^{-\frac{3}{2}} (2x) =$
 $= \frac{6(x+1) \arcsen^2((x+1)^2)}{\sqrt{1-(x+1)^4}} + \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2}}$

24. $g'(x) = \frac{1}{1 + \frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}} \times \frac{(1+\cos x)(\sen x) - (1-\cos x)(-\sen x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{\sen x}{2|\sen x|}$

25. $\frac{dy}{dx} = \frac{(1+y^2)(2x - \arctan y)}{x - 2y(1+y^2)} = \frac{(1+y^2)(x^2 - y^2)}{x^2 - 2xy(1+y^2)}$

26. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-x^2y^2} - y}{x - \sqrt{1-x^2y^2}}$

30. (a) $f'(x) = 2 + 4x \arctan x \neq 0$ pois (i) $f'(0) = 2$; (ii) $x > 0 \Rightarrow \arctan x > 0 \Rightarrow x \arctan x > 0 \Rightarrow f'(x) > 2 \Rightarrow f'(x) > 0$; (iii) $x < 0 \Rightarrow \arctan x < 0 \Rightarrow x \arctan x > 0 \Rightarrow f'(x) > 2 \Rightarrow f'(x) > 0$.

Logo aplicando o Teorema da Função Inversa, f possui inversa f^{-1} .

(b) $f(-1) = 4 \arctan(-1) = -\pi; (f^{-1})'(-\pi) = \frac{1}{2+\pi}$.