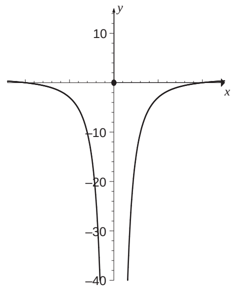
Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 11 - 2009-1
Teorema de Rolle
Teorema do Valor Médio - TVM

Nos exercícios 1. a 6. verifique se o Teorema de Rolle pode ser aplicado à f nos intervalos indicados.

1. $f(x) = 1 - |x-1|, \quad x \in [0,2]$
2. $f(x) = x^2 - 2x, \quad x \in [-1,3]$
3. $f(x) = (x-3)(x+1)^2, \quad x \in [-1,3]$
4. $f(x) = x - x^{\frac{1}{3}}, \quad x \in [0,1]$
5. $f(x) = x - x^{\frac{1}{3}}, \quad x \in [-1,1]$
6. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \qquad I = [-2,2]$

gráfico do ex. 6



7. A altura de uma bola, t segundos após o lançamento, é dada por $f(t) = -16t^2 + 48t + 32$.
   (a) Verifique que $f(1) = f(2)$;
   (b) Segundo o Teorema de Rolle, qual deve ser a velocidade v da bola em algum instante do intervalo $[1,2]$? Enuncie o Teorema de Rolle;
   (c) Encontre a velocidade média da bola durante os dois primeiros segundos;
   (d) Em que instante a velocidade instantânea é igual à velocidade média acima? Enuncie o teorema que nos garante isso.
8. Seja $f : [-1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[-1,2]$, diferenciável em $(-1,2)$, com $f(-1) = -1$ e $f(2) = 5$. Prove que existe um ponto no gráfico de f em que a reta tangente é paralela à reta $y = 2x$.
9. Seja $p(x) = Ax^2 + Bx + C$. Prove que, para qualquer intervalo $[a,b]$, o valor de c cuja existência é garantida pelo Teorema do Valor Médio (TVM), é o ponto médio do intervalo.
10. Se $a > 0$ e n é um inteiro não negativo qualquer, prove que $p(x) = x^{2n+1} + ax + b$ não pode ter duas raízes reais.
11. Mostre que $g(x) = 8x^3 + 30x^2 + 24x + 10$ admite uma única raiz no intervalo $(-3,-2)$.
12. Seja P uma função polinomial não constante.
   (a) Prove que, entre dois zeros consecutivos de P' (isto é, dois valores de x que anulam a derivada e tal que entre eles não existe outro valor que anula a derivada), existe no máximo uma raiz de P.
   (b) Se P tem três raízes distintas em $[a,b]$, prove que $P''(c) = 0$, para algum valor $c \in (a,b)$.

RESPOSTAS

1. Não, a hipótese f diferenciável em $(0,2)$ falha, pois f não é diferenciável em $x = 1 \in (0,2)$.
2. Sim 3. Sim 4. Sim
5. Não, f diferenciável em $(-1,1)$ não se verifica, pois f não é diferenciável em $x = 0 \in (-1,1)$.
6. Não, a hipótese f contínua em $[-2,2]$ não se verifica, pois f não é contínua em $x = 0 \in [-2,2]$.
7. (a) $f(1) = f(2) = 64$ (b) $v = 0$ (c) 16 m/seg (d) $t = 1$ seg
8. Existe uma reta tangente ao gráfico e paralela à reta $y = 2x \iff \exists x \in [1,2]$ tal que $f'(x) = 2$ (coeficientes angulares iguais). Calcule o coeficiente angular da reta secante ao gráfico que contém os pontos $(-1, f(-1))$ e $(2, f(2))$, depois aplique o Teorema do Valor Médio (TVM).
9. (i) p é contínua em $[a,b]$ pois p é uma função polinomial; (ii) p é diferenciável em (a,b) pois p é uma função polinomial. Se valem as hipóteses (i) e (ii) do TVM, então vale a tese : $\exists c \in (a,b)$ tal que
$$p'(c) = \frac{p(b)-p(a)}{b-a} = \frac{\left(Ab^2+Bb+C\right)-\left(Aa^2+Ba+C\right)}{b-a} = \frac{A\left(b^2-a^2\right)+B(b-a)}{b-a} =$$
$$= \frac{A(b-a)(b+a)+B(b-a)}{b-a} = \frac{(b-a)[A(b+a)+B]}{b-a} = A(b+a)+B.$$
Além disso, como $p'(x) = 2Ax + B$, temos que $p'(c) = 2Ac + B$.
Igualando as duas expressões de $p'(c)$ e simplificando, chegamos a $c = \dfrac{a+b}{2}$.
10. Suponha, por absurdo, que $p(x)$ tem duas raízes reais x_1 e x_2 com $x_1 < x_2$. As hipóteses do Teorema de Rolle para p em $[x_1, x_2]$ são verdadeiras: (i) e (ii) p é contínua em $[x_1, x_2]$ e diferenciável em (x_1, x_2) pois p é uma função polinomial; (iii) $p(x_1) = p(x_2) = 0$ pois x_1 e x_2 são raízes de $p(x)$.
Aplicando o Teorema de Rolle: $\exists c \in (x_1, x_2)$ tal que $p'(c) = 0$ (*)
Por outro lado, $p'(x) = (2n+1)x^{2n} + a = (2n+1)\left(x^n\right)^2 + a$.
Como, $(2n+1)\left(x^n\right)^2 \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ e por hipótese $a > 0$, temos que $p'(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (**)
As conclusões (*) e (**) são contraditórias, logo não é possível supor que existem duas raízes reais.
11. 1ª **parte:** Como a função polinomial g é contínua em $[-3,-2]$, $g(-3) = -8 < 0$ e $g(-2) = 18 > 0$, pelo Teorema do Valor Intermediário, g possui pelo menos uma raiz entre -3 e -2.

    2ª **parte:** Suponha, por absurdo, que g admite duas raízes c_1 e c_2 tal que $-3 < c_1 < c_2 < -2$. Logo $g(c_1) = g(c_2) = 0$. Como a função polinomial g é contínua em $[-3,-2]$ e diferenciável em $(-3,-2)$, pelo Teorema de Rolle, $\exists c$ entre c_1 e c_2 tal que $g'(c) = 0$. (*)
    Por outro lado, $g'(x) = 24x^2 + 60x + 24 = 12(x+2)(2x+1)$, analisando o sinal de $g'(x)$, temos $g'(x) > 0$ quando $-3 < x < -2$, logo $g'(c) > 0$, que contradiz com (*). Conclusão: g não admite duas raízes entre -3 e -2.

    Pela 1ª parte, g possui pelo menos uma raiz entre -3 e -2 e pela 2ª parte, g não admite duas raízes entre -3 e -2, consequentemente g possui uma única raiz entre -3 e -2.
12. (a) Suponha que x_1 e x_2 são dois zeros consecutivos de P'. Suponha, por absurdo, que entre x_1 e x_2 existem duas raízes de P. Sejam x_3 e x_4, com $x_3 < x_4$ essas raízes de P. Assim, $(x_3, x_4) \subset (x_1, x_2)$. Aplicando o Teorema de Rolle para a função P em $[x_3, x_4]$: $[(\text{i})P(x_3) = P(x_4) = 0]$, verifique as outras duas hipóteses, afirmamos que $\exists\ c \in (x_3, x_4) \subset (x_1, x_2)$ tal que $P'(c) = 0 \Longrightarrow \exists\ c \in (x_1, x_2)$ tal que $P'(c) = 0$, o que contradiz com a hipótese de que x_1 e x_2 são dois zeros consecutivos de P'.

    (b) Sejam x_1, x_2 e x_3 as três raízes, com $x_1 < x_2 < x_3$. O Teorema de Rolle aplicado a P nos intervalos $[x_1, x_2]$ e $[x_2, x_3]$ nos garante (verifique as hipóteses) que $\exists\ c_1 \in (x_1, x_2)$ e $\exists\ c_2 \in (x_2, x_3)$ tais que $P'(c_1) = P'(c_2) = 0$. Agora, o Teorema de Rolle aplicado a P' no intervalo $[c_1, c_2]$ nos garante (verifique as hipóteses) que $\exists\ c \in (c_1, c_2)$ tal que $P''(c) = 0$.