Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 14 - 2009-1
Crescimento e decrescimento de funções
Máximos e mínimos relativos
Máximos e mínimos absolutos

1. Em cada parte, dê os intervalos em que a função é crescente e em que é decrescente.

   (a) $f(x) = x + \dfrac{3}{x^2}$ (b) $g(t) = \dfrac{3t^2 + 4t}{1 + t^2}$ (c) $F(u) = \dfrac{u^2 - u + 1}{2(u-1)}$

2. Seja f uma função tal que $f(0) = 0$ e $f'(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Mostre que $0 < f(x) < x, \forall x > 0$.

3. Mostre que $\operatorname{sen} x < x, \quad \forall x > 0$.

   (Sugestão: para $x \geq \pi/2$, use propriedades da trigonometria, para $0 < x < \pi/2$, use derivada)

4. Prove a desigualdade $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$, $x \neq 0$.

   (Sugestão: prove para $x > 0$ e depois use o fato de que as funções de ambos os lados são pares)

5. Prove, para $x > 0$, a desigualdade $x - \dfrac{x^3}{6} < \operatorname{sen} x$.

6. Mostre que: (a) $e^x > x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (b) $e^x > \dfrac{x^2}{2}, \quad \forall x \geq 0$

Nos exercícios 7. a 9. localize os pontos onde ocorrem os extremos absolutos das funções nos intervalos dados.

7. $f(x) = x^3 - 3x^2,\ x \in [-1, 3]$
8. $f(x) = 2\cos x + \operatorname{sen} 2x,\ x \in [0, 4\pi]$
9. $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^3}{3} + 2,\ x \in [-2, 2]$

10. Mostre que $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ tem máximo absoluto em $x = e$. Conclua que $\pi^e < e^\pi$.

11. Ache a inclinação máxima da curva $y = x^3 - 3x + 3$ no intervalo $\left[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$.

12. Mostre que $p(x) = x^3 - 3x^2 + 6$ <u>tem exatamente uma</u> raiz real e localize-a em um intervalo de amplitude máxima 1.

13. Mostre que $f(x) = x^2 - x\operatorname{sen} x - \cos x$ tem <u>exatamente duas</u> raízes reais e localize-as em intervalos de amplitude máxima $\pi/2$.

14. Prove que para todo $x > 0$ vale a seguinte desigualdade: $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$.

    (Sugestão: estude o crescimento da expressão do lado esquerdo e determine o mínimo absoluto dessa expressão no intervalo dado).

15. A concentração C de certa substância química no fluxo sangüínio em t horas após ter sido injetado no músculo é dada por $C = \dfrac{3t}{54 + t^3}$. Em que instante a concentração é máxima? Qual é a concetração máxima?

RESPOSTAS

1. (a) Crescente em $(-\infty, 0) \cup \left(\sqrt[3]{6}, \infty\right)$, decrescente em $\left(0, \sqrt[3]{6}\right)$.
   (b) Crescente em $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$, decrescente em $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (2, \infty)$.
   (d) Crescente em $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, decrescente em $(0, 1) \cup (1, 2)$.

2. Primeiro vamos mostrar que $f(x) > 0,\ \forall x > 0$.

   (i) $f'(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2} > 0,\ \forall x \neq 0 \Longrightarrow f$ é crescente em $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$;

   (ii) A função f é contínua em $\mathbb{R}$ pois f é diferenciável em $\mathbb{R}$.

   Por (i) e (ii) concluímos: f é crescente em $(0, \infty)$ e contínua em $[0, \infty) \Longrightarrow f(x) > f(0),\ \forall x > 0$.

   Finalmente, como por hipótese $f(0) = 0$, concluímos que $f(x) > 0,\ \forall x > 0$.

   Agora vamos mostrar que $f(x) < x,\ \forall x > 0$. Mas $f(x) < x,\ \forall x > 0 \Longleftrightarrow x - f(x) > 0,\ \forall x > 0$. Considerando $F(x) = x - f(x)$ temos que provar que $F(x) > 0,\ \forall x > 0$. Provando:

   (i) $F'(x) = 1 - \dfrac{x^2}{1+x^2} = \dfrac{1}{1+x^2} > 0,\quad x \neq 0 \Longrightarrow f$ é crescente em $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$;

   (ii) A função F é contínua em $\mathbb{R}$ pois é a diferença de funções contínuas em $\mathbb{R}$.

   Por (i) e (ii) concluímos: F é crescente em $(0, \infty)$ e contínua em $[0, \infty) \Longrightarrow F(x) > F(0),\ \forall x > 0$.

   Como $F(0) = 0 - f(0) = 0$, concluímos que $F(x) > 0,\ \forall x > 0$.

3. Para $x \geq \dfrac{\pi}{2}$. Como $1 < \dfrac{\pi}{2}$ e $\operatorname{sen} x \leq 1$, temos que $\operatorname{sen} x \leq 1 < \dfrac{\pi}{2} \leq x$. Logo $\operatorname{sen} x < x$.

   Para $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Como $\operatorname{sen} x < x \Longleftrightarrow x - \operatorname{sen} x > 0$, considere $F(x) = x - \operatorname{sen} x$.

   Como F é a soma de funções contínuas em $\mathbb{R}$, concluímos que F é contínua em $\mathbb{R}$. (*)

   $F'(x) = 1 - \cos x$ e sabemos que $\cos x < 1,\ \forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Logo $F'(x) = 1 - \cos x > 0\ \forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

   Assim concluímos que F é crescente em $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. (**)

   Pelas conclusões (*) e (**), temos que $F(x) = x - \operatorname{sen} x > F(0) = 0,\ \forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

4. Como $\forall x > 0,\ \cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2} \Longleftrightarrow \forall x > 0,\ (\cos x) - 1 + \dfrac{x^2}{2} > 0$, considere $F(x) = (\cos x) - 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

   Como $F(0) = 1 - 1 + 0 = 0$, se provarmos que (i) F é contínua em $[0, \infty)$ e (ii) F é crescente em $(0, \infty)$ concluíremos que $F(x) > F(0) = 0,\ \forall x > 0$. Provando (i) e (ii):

   (i) F é contínua em $\mathbb{R}$ pois é a soma, diferença e quociente de funções contínuas em $\mathbb{R}$.

   (ii) Para provar que F é crescente em $(0, \infty)$ basta provar que $F'(x) > 0,\ \forall x > 0$. Mas $F'(x) = -\operatorname{sen} x + x$. Logo basta provar que $-\operatorname{sen} x + x > 0,\ \forall x > 0$, isto é, $\operatorname{sen} x < x,\ \forall x > 0$, já provado no exercício 5.

   Agora, seguindo a sugestão, $x < 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow F(-x) > 0$ (provado acima). Mas $F(-x) = (\cos(-x)) - 1 + \dfrac{(-x)^2}{2} = F(x)$. Logo $\forall x < 0,\quad F(x) = F(-x) > 0$.

5. Considere $G(x) = (\operatorname{sen} x) - x + \dfrac{x^3}{6}$. Temos $G'(x) = (\cos x) - 1 + \dfrac{x^2}{2}$. Esta é a função F do exercício 6. e já provamos que $(\cos x) - 1 + \dfrac{x^2}{2} > 0,\quad \forall x > 0$. Assim, concluímos que G é crescente em $(0, \infty)$. (*)

   Como G é a soma de funções contínuas em $\mathbb{R}$, concluímos que G é contínua em $\mathbb{R}$. (**)

   Pelas conclusões (*) e (**), temos que $G(x) = (\operatorname{sen} x) - x + \dfrac{x^3}{6} > G(0) = 0,\ \forall x > 0$.

6. (a) Vamos analisar cada possibilidade.

   (i) Supondo $x < 0$. Sabemos que $e^x > 0,\ \forall x$, em particular quando $x < 0$ temos que $e^x > 0 > x$.

   (ii) Supondo $x \geq 0$. Para $x = 0$, $e^0 = 1 > 0$. Considere a função $f(x) = e^x - x$, contínua em $[0, \infty)$. Derivando, $f'(x) = e^x - 1$. Mas $x > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ é estritamente crescente em $[0, \infty)$ $\Rightarrow f(x) > f(0) = e^0 - 0 = 1 > 0 \Rightarrow f(x) = e^x - x > 0 \Rightarrow e^x > x$.

   (b) Considere a função $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$, contínua em $[0, \infty)$. Derivando $f'(x) = e^x - x$. Foi mostrado no item anterior que $e^x > x, \forall x$, logo $f'(x) > 0$. Mas $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ é estritamente crescente em $[0, \infty) \Rightarrow f(x) > f(0) = e^0 - 0 = 1 > 0 \Rightarrow f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2} > 0 \Rightarrow e^x > \dfrac{x^2}{2}$.

7. A função polinomial $f(x) = x^3 - 3x^2$ é contínua no intervalo fechado e limitado $[-1, 3]$, logo f satisfaz as hipóteses do Teorema dos Valores Extremos (é o teorema de Weierstrass). Aplicando esse teorema, comparamos os valores $f(-1)$ e $f(3)$ com os valores de f nos pontos críticos que estão no interior de $[-1, 3]$. Concluímos que: $\text{mín } f = f(-1) = f(2) = -4$ e $\text{máx } f = f(0) = f(3) = 0$.

8. A função $f(x) = 2\cos x + \operatorname{sen} 2x$ é contínua em $\mathbb{R}$ pois é a soma de produto e composta de funções contínuas em $\mathbb{R}$, logo f é contínua no intervalo fechado e limitado $[0, 4\pi]$. Assim, pelo Teorema de Weierstrass, comparamos os valores $f(0)$ e $f(4\pi)$ com os valores de f nos pontos críticos que estão em $(0, 4\pi)$. Concluímos: $\text{mín } f = f(5\pi/6) = (17\pi/6) = -3\sqrt{3}/2$ e $\text{máx } f = f(\pi/6) = (13\pi/6) = 3\sqrt{3}/2$.

9. A função polinomial $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^3}{3} + 2$ é contínua no intervalo fechado e limitado $[-2, 2]$. Assim, pelo Teorema dos Valores Extremos, comparamos os valores $f(-2)$ e $f(2)$ com os valores de f nos pontos críticos que estão em $(-2, 2)$. Concluímos: $\text{mín } f = f(-2) = -\dfrac{26}{15}$ e $\text{máx } f = f(2) = \dfrac{86}{15}$.

10. Domínio de $f = (0, \infty)$. Derivando, $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$. Analisando o sinal de $f'(x)$, temos $f'(x) > 0$ quando $0 < x < e$; $f'(x) < 0$ quando $x > e \Rightarrow f$ é crescente quando $0 < x < e$; f é decrescente quando $x > e$. Logo f tem um máximo relativo no único ponto crítico $x = e$. Como f é contínua em $x = e$, concluímos que f tem um máximo absoluto em $x = e$.

    Provando a desigualdade: f tem máximo absoluto em $x = e \Rightarrow f(\pi) < f(e) = \dfrac{\ln e}{e} = \dfrac{1}{e} \Rightarrow f(\pi) = \dfrac{\ln \pi}{\pi} < \dfrac{1}{e}$. Como $e > 0$ e $\pi > 0$, temos: $e \ln \pi < \pi$. Aplicando a propriedade de logaritmo de potência, temos $e \ln \pi = \ln \pi^e$, logo $\ln \pi^e < \pi$. Sabemos que a função exponencial é estritamente crescente, logo $e^{\ln \pi^e} < e^\pi$. Sabemos que $e^{\ln x} = x, \forall x > 0$, em particular $e^{\ln \pi^e} = \pi^e$. Logo, $\pi^e < e^\pi$.

11. $\text{Máx } f' = f'(5/2) = 63/4$.

12. Estudando o crescimento de f e aplicando o Teorema do Valor Intermediário, conclui-se que a única raiz está em $(-2, -1)$.

13. Idem anterior, uma raiz está em $(-\pi/2, 0)$ e a outra em $(0, \pi/2)$.

14. No intervalo $(0, \infty)$, o mínimo absoluto de $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ é igual a $f(1) = 2$. Logo $f(x) \geq f(1) = 2$.

15. No instante $t = 3$. A concentração máxima é $\dfrac{1}{9} = 0,1111... = 0,\overline{1}$.