

**uff** Universidade Federal Fluminense  
 EGM - Instituto de Matemática  
 GMA - Departamento de Matemática Aplicada

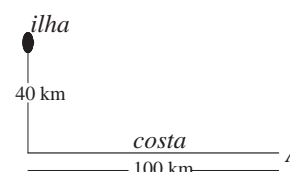
**LISTA 16 - 2009-1**

Problemas de otimização

- Quais são as dimensões do retângulo de maior área que pode ser inscrito em um semi-círculo de raio  $r$ ?
- Uma página deve conter  $60 \text{ cm}^2$  de área impressa. As margens superior e inferior devem ter 3 cm, enquanto as laterais têm 2 cm cada. Encontre as dimensões da página que consomem a menor quantidade de papel.
- Constrói-se uma janela normanda colocando-se um semicírculo em cima de uma janela retangular (figura ao lado). Encontre as dimensões da janela de área máxima, sabendo-se que seu perímetro é de 5 m.



- Uma ilha situada a 40 km da costa deve ter um serviço de barcos para uma cidade **A** (figura ao lado). Se os barcos têm velocidade média de 15 km/h e os carros uma velocidade média de 45 km/h, onde deverá estar situada a estação de barcos na costa, a fim de tornar a via a mais rápida possível?



- Considere os triângulos retângulos no 1º. quadrante, cada um com seus lados apoiados nos eixos coordenados e em uma reta que contém o ponto  $(2, 3)$ . Encontre o triângulo de área mínima.
- Encontre as dimensões do cone circular de maior volume que pode ser inscrito em uma esfera de raio  $r$ . Calcule o volume desse cone.
- Um oleoduto tem a forma da curva  $y = 1 - x^2$  com  $0 \leq x \leq 1$ ,  $x$  e  $y$  medidos em quilômetros. Será construída uma cerca tangente à curva  $y = 1 - x^2$  no ponto  $P \neq (0, 1)$ . Determine as coordenadas do ponto  $P$  de modo que a área da região triangular formada pela cerca e pelos eixos seja mínima.
- Se um objeto dista  $x$  unidades de um foco de intensidade luminosa constante  $I$ , a luminosidade do objeto é igual a  $I/x^2$ . Dois focos,  $F_1$  e  $F_2$  de intensidades  $I_1$  e  $I_2$ , respectivamente, encontram-se separados por  $d$  unidades. Em que ponto do segmento de reta que liga  $F_1$  a  $F_2$ , a luminosidade é mínima? Qual deve ser a razão entre  $I_1$  e  $I_2$  para que o ponto de luminosidade mínima entre os dois focos esteja a uma distância de  $d/3$  unidades da fonte de luminosidade  $I_1$ ?
- Um quadro de altura  $H$  está pendurado em uma parede vertical de modo que sua borda inferior está a uma altura  $h$  do raio de visão horizontal de um observador. A que distância da parede deve colocar-se o observador para que a sua posição seja a mais vantajosa para contemplar o quadro, isto é, para que o ângulo de visão seja máximo?
- Um fabricante produz por semana  $x$  toneladas de um certo produto. O preço de venda é de  $p$  unidades monetárias por tonelada do produto e está relacionado com  $x$  por  $5x = 375 - 3p, p \geq 0$ . O custo de produção é de  $C(x) = 500 + 15x + \frac{x^2}{6}$  unidades monetárias. Determine  $x$  para que o lucro (=venda-custo) seja máximo. Determine, também, o lucro máximo.

RESPOSTAS

- Base (no diâmetro) =  $r\sqrt{2}$  e altura =  $r\sqrt{2}/2$ .      2. São  $6 + 3\sqrt{10} \cong 15,49$  cm e  $4 + 2\sqrt{10} \cong 10,32$  cm.
- Retângulo: base =  $\frac{10}{\pi + 4} \cong 1,4$  m, altura =  $\frac{5}{\pi + 4} \cong 0,7$  m.      4. À  $100 - 10\sqrt{2} \cong 85,86$  km de  $A$ .
- Vértices:  $(0, 0)$ ;  $(4, 0)$ ;  $(0, 6)$ .      6. Raio =  $\frac{2\sqrt{2}}{3}r$ , altura =  $\frac{4}{3}r$ , volume =  $\frac{32\pi}{81}r^3$ .
- Distância do ponto a  $F_1$  é  $\frac{\sqrt[3]{I_1} d}{\sqrt[3]{I_1} + \sqrt[3]{I_2}}$ , razão = 8.      8.  $P = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3}\right)$ .
- Distância =  $\sqrt{hH + h^2}$ .      10.  $x = 30$  toneladas e lucro = 1150 unidades monetárias.