Universidade Federal Fluminense - UFF

Gabarito da VR - Álgebra linear I - GAN00148

Nome:____ Matricula:_________

1) (2,0pt) Encontre $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que a sua matriz nas bases $\alpha = \{(1,1),(1,-1)\}$ e $\beta = \{(1,0,1),(-2,0,1),(0,1,0)\}$ é

$$[F]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Solução Se $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ é a base canônica do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente então

$$\begin{aligned} [F]_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{C}_1} &= [I]_{\mathcal{C}_2}^{\beta}\,[F]_\beta^\alpha\,[I]_\alpha^{\mathcal{C}_1} \\ [F]_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{C}_1} &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto, $F(x,y) = (-3y, 2x+3y, 3x-3y)$.

2) (2,5pt) Sejam $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y,z) = (4x+2y-2z, 6x-4y+8z)$ e $\beta = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\} \subset \mathbb{R}^3$ e $\beta' = \{(1,3),(1,4)\} \subset \mathbb{R}^2$.

a) Escreva a matriz $[T]_{\beta'}^{\beta}$ associada a T nas bases β e β'.

b) Se $\beta_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ e $\beta_2 = \{(1,0),(0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ bases canônicas, encontre as matrizes mudança de coordenadas $[I]_\beta^{\beta_1}$ da base β_1 para β e $[I]_{\beta_2}^{\beta'}$ da base β' para β_2. Use estas matrizes para escrever $[T]_{\beta_2}^{\beta_1}$.

Solução a) (1,0pt) Depois dos cálculos obtemos a matriz

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 6 & 22 & 10 \\ -2 & -16 & -6 \end{bmatrix}$$

b) (1,5pts) Calculando obtemos as seguintes matrizes

$$[I]_{\beta_2}^{\beta'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } [I]_\beta^{\beta_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Multiplicando

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 22 & 10 \\ -2 & -16 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 8 \end{bmatrix}.$$

3) (3,0pts) Sejam $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (2x+2y+4z, 2x+4y+2z, 4x+2y+2z)$ e $I : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $I(x,y,z) = (x,y,z)$. E seja $\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

a) Calcule a matriz de $[T]_\beta^\beta$ na base canônica;

b) Determine: β_1 uma base de $N(T-8I)$; β_2 uma base de $N(T+2I)$; e β_3 uma base de $N(T-2I)$.

c) Considere uma base $\beta_4 = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \beta_3$ e calcule $[T]_{\beta_4}^{\beta_4}$.

Solução a) (0,5pt) Depois dos cálculos obtemos a matriz

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

b) (1,5pts) Fazendo as contas obtemos $\beta_1 = \{(1,1,1)\}$, $\beta_2 = \{(-1,0,1)\}$ e $\beta_3 = \{(1,-2,1)\}$
c) (1,0pt) a matriz com respeito a base $\beta_4 = \{(1,1,1),(-1,0,1),(1,-2,1)\}$ fica

$$[T]_{\beta_4}^{\beta_4} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

4) (2,5pts) Seja $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, onde $S(v)$ é a reflexão através do plano $x + 2y - 2z = 0$.

(a) Encontre $S(x,y,z)$.

(b) Encontre uma base β de $\mathbb{R}^3$, tal que

$$[S]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(c) Encontre a matriz $B = [S]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$, onde $\mathcal{C}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^3$ e calcule $\det B$.

Solução a) (1,5pts) Necessitamos encontrar uma base ortogonal do plano $\Pi : x+2y-2z = 0$ veja que o vetor $\mathbf{u} = (0,1,1) \in \Pi$, então um vetor perpendicular a $\mathbf{u}$ e pertencente a Π é o vetor $\mathbf{v} = (4,-1,1)$. Para obtermos a projeção sobre Π devemos somar as projeções sobre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$

$$\begin{aligned} P_\Pi(x,y,z) &= P_{\mathbf{u}}(x,y,z) + P_{\mathbf{v}}(x,y,z) \\ &= \left(0, \frac{y+z}{2}, \frac{y+z}{2}\right) + \left(\frac{2}{9}(4x-y+z), \frac{1}{18}(-4x+y-z), \frac{1}{18}(4x-y+z)\right) \\ &= \left(\frac{2}{9}(4x-y+z), \frac{1}{9}(-2x+5y+4z), \frac{1}{9}(2x+4y+5z)\right) \end{aligned}$$

e a reflexão fica

$$\begin{aligned} S(x,y,z) &= (2P_\Pi - I)(x,y,z) \\ &= 2\left(\frac{2}{9}(4x-y+z), \frac{1}{9}(-2x+5y+4z), \frac{1}{9}(2x+4y+5z)\right) - (x,y,z) \\ &= \left(\frac{1}{9}(7x-4y+4z), \frac{1}{9}(-4x+y+8z), \frac{1}{9}(4x+8y+z)\right) \end{aligned}$$

b)(0,5pt) Como $S(x,y,z)$ é uma reflexão em torno do plano Π basta escolhermos os a base β por ser dois vetores sobre o plano Π e um vetor perpendicular a Π, veja que $\mathbf{w} = (1,2,-2)$ é perpendicular a Π, então $\beta = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ e nessa base obtemos a matriz desejada.

c) (0,5pt) Queremos calcular o determinante de $B = [S]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$, pela fórmula de $S(x,y,z)$, vemos que não será uma conta fácil. Mas temos uma forma de fazer um atalho nessa conta, veja que $[S]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = [I]_{\mathcal{C}}^{\beta}[S]_{\beta}^{\beta}[I]_{\beta}^{\mathcal{C}}$ e temos

$$\begin{aligned}
\det B &= \det\left([I]_{\mathcal{C}}^{\beta}[S]_{\beta}^{\beta}[I]_{\beta}^{\mathcal{C}}\right) = \det\left(\left([I]_{\beta}^{\mathcal{C}}\right)^{-1}[S]_{\beta}^{\beta}[I]_{\beta}^{\mathcal{C}}\right) \\
&= \det\left(\left([I]_{\beta}^{\mathcal{C}}\right)^{-1}\right)\det\left([S]_{\beta}^{\beta}\right)\det\left([I]_{\beta}^{\mathcal{C}}\right) \\
&= \det\left([I]_{\beta}^{\mathcal{C}}\right)^{-1}\det\left([S]_{\beta}^{\beta}\right)\det\left([I]_{\beta}^{\mathcal{C}}\right) \\
&= \det\left([S]_{\beta}^{\beta}\right) = -1.
\end{aligned}$$