Universidade Federal Fluminense - UFF

Gabarito da VS - Álgebra Linear I - GAN00148 - 28/03/2013

1) (1,5pt) Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Admita que $\det(A) = 12$. Ache:

(a) $\det(2A^{-1})$; (b) $\det(4^{-1}A^t)^{-1}$ e (c) $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \end{bmatrix}$

Solução: a) (0,5pt) $\det(2A^{-1}) = 2^3 \det A^{-1} = \frac{8}{det(A)} = \frac{4}{3}$.

b) (0,5pt) $\det(4^{-1}A^t)^{-1} = \frac{1}{\det(4^{-1}A^t)} = \frac{4^3}{\det(A^t)} = \frac{64}{\det(A)} = \frac{16}{3}$.

c) (0,5pt) Veja que

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \end{bmatrix} = 2\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = -2\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -24.$$

2) (2,5pt) Sejam $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (2x + y - 2z, 5x - 3y + 2z)$ e $\alpha = \{(-1, 1, 1), (1, -1, 0), (1, 0, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$ e $\beta = \{(1, 5), (1, 6)\} \subset \mathbb{R}^2$.

a) Escreva a matriz $A = [T]^{\alpha}_{\beta}$;

b) Usando a matriz A obtenha uma base para o $\mathrm{N}(T)$ e uma base para a $\mathrm{I}m(T)$.

c) Mostre que essa aplicação satisfaz o Teorema do Núcleo e da Imagem;

d) Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ bases canônicas do $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Obtenha as bases do $\mathrm{N}(T)$ e da $\mathrm{I}m(T)$ com respeito a essas bases.

e) Calcule $[T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}$ usando $[I]^{\mathcal{C}}_{\alpha}$ e $[I]^{\beta}_{\mathcal{C}'}$.

Solução: a)(0,5pt) Calculando obtemos

$$\begin{bmatrix} -12 & -2 & 7 \\ 9 & 3 & -5 \end{bmatrix} \text{ escalonando } \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{11}{18} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

b)(0,5pt) Olhando o escalonamento acima vemos que uma base para o $\mathrm{N}(T)$ é o vetor $\begin{bmatrix} 11 & -3 & 18 \end{bmatrix}^t_{\alpha}$. Para a imagem, sabemos que é gerada pela colunas da matriz, veja que a 2ª e a 3ª coluna da matriz não são múltiplos um do outro e por isso geram todo o $\mathbb{R}^2$, em particular a imagem de T, por isso, uma base para a $\mathrm{I}m(T)$ são $\begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix}^t_{\beta}$, $\begin{bmatrix} 7 & -5 \end{bmatrix}^t_{\beta}$.

c) (0,5pt) Sabemos que $\dim \mathrm{N}(T) = 1$ e $\dim \mathrm{I}m(T) = 2$ daí, $3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{N}(T) + \dim \mathrm{I}m(T) = 1 + 2 =$.

d) (0,5pt) O vetor $\begin{bmatrix} 11 & -3 & 18 \end{bmatrix}^t_{\alpha}$ na base canônica é $\begin{bmatrix} 4 & 14 & 11 \end{bmatrix}^t$ e os vetores que geram a imagem são $\begin{bmatrix} 1 & 8 \end{bmatrix}^t$, $\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}^t$, respectivamente.

e) (0,5pt)

$$\begin{aligned}[T]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}} &= [I]_{\mathcal{C}'}^{\beta}\,[T]_{\beta}^{\alpha}\,[I]_{\alpha}^{\mathcal{C}} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 & -2 & 7 \\ 9 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

3) (3,0pts) Sejam $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (-x - 4y + 14z, 2x - 7y + 14z, 2x - 4y + 11z)$ e $I : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $I(x, y, z) = (x, y, z)$. E seja $\beta = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$.

a) Calcule a matriz de $[T]_{\beta}^{\beta}$;

b) Determine: β_1 uma base de $N(T + 3I)$; β_2 uma base de $N(T - 9I)$;

c) Considere uma base $\alpha = \beta_1 \cup \beta_2$ e calcule $[T]_{\alpha}^{\alpha}$.

Solução: a) (1,0pt) Calculando obtemos

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} 9 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

b) (1,5pt) Se usarmos a matriz acima para calcular as bases β_1 e β_2 obteremos os vetores escritos na base β, então vou escrever a ambos na base β e na base canônica do $\mathbb{R}^3$. Então

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -7 \end{bmatrix}_{\beta}^{t} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{t}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{\beta}^{t} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{t} \right\} \\ \beta_2 &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\beta}^{t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{t} \right\}\end{aligned}$$

c) (0,5pt) Se $\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} -7 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{t}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{t}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{t} \right\}$ então

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

4) (2,0pts) Seja $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, onde $S(v)$ é a reflexão através do plano $2x + 4y - 2z = 0$.

(a) Encontre $S(x, y, z)$.

(b) Encontre uma base β de $\mathbb{R}^3$, tal que

$$[S]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(c) Encontre a matriz $B = [S]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$, onde $\mathcal{C}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^3$ e calcule $\det B$.

Solução: (1,0pt) Inicialmente precisamos escolher uma base ortonormal para o plano $\Pi : 2x + 4y - 2z = 0$, então escolhemos os vetores $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^t$. Logo a projeção ortogonal sobre Π é dado por

$$\begin{aligned}
\operatorname{Proj}_\Pi(x,y,z) &= \operatorname{Proj}_{\mathbf{u}}(x,y,z) + \operatorname{Proj}_{\mathbf{v}}(x,y,z) \\
&= \left(\frac{x+z}{2}, 0, \frac{x+z}{2} \right) + \left(\frac{1}{3}(x-y-z), \frac{1}{3}(-x+y+z), \frac{1}{3}(-x+y+z) \right) \\
&= \left(\frac{1}{6}(5x-2y+z), \frac{1}{3}(-x+y+z), \frac{1}{6}(x+2y+5z) \right).
\end{aligned}$$

E fazendo $S(x,y,z) = (2\operatorname{Proj}_\Pi - I)\,(x,y,z)$ obtemos

$$\begin{aligned}
S(x,y,z) &= 2\left(\frac{1}{6}(5x-2y+z), \frac{1}{3}(-x+y+z), \frac{1}{6}(x+2y+5z)) \right) - (x,y,z) \\
&= \left(\frac{1}{3}(2x-2y+z), \frac{1}{3}(-2x-y+2z), \frac{1}{3}(x+2y+2z) \right)
\end{aligned}$$

b) (0,5pt) basta escolheremos dois vetores dentro do plano e um vetor perpendicular ao plano, isso é, $\beta = \left\{ \mathbf{u}, \mathbf{v}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^t \right\}$.

c) (0,5pt)

$$\begin{aligned}
\det B &= \det\left([I]^\beta_{\mathcal{C}} [S]^\beta_\beta [I]^{\mathcal{C}}_\beta \right) = \det\left(\left([I]^{\mathcal{C}}_\beta\right)^{-1} [S]^\beta_\beta [I]^{\mathcal{C}}_\beta \right) \\
&= \det\left(\left([I]^{\mathcal{C}}_\beta\right)^{-1} \right) \det\left([S]^\beta_\beta \right) \det\left([I]^{\mathcal{C}}_\beta \right) \\
&= \det\left([I]^{\mathcal{C}}_\beta\right)^{-1} \det\left([S]^\beta_\beta \right) \det\left([I]^{\mathcal{C}}_\beta \right) \\
&= \det\left([S]^\beta_\beta \right) = -1.
\end{aligned}$$