## Lista 10 de Matemática Discreta I – GAN00170 – 20132

**13.1.** Para cada uma das seguintes relações definidas no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, determine se a relação é reflexiva, antirreflexiva, antissimétrica e/ou transitiva.

**a.** $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$
**b.** $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$
**c.** $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$
**d.** $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$
**e.** $R = \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$

**13.2.** Digamos que dois inteiros estejam próximos um do outro se sua diferença for no máximo 2. (isto é, os números estão a uma distância de no máximo 2). Por exemplo, 3 está próximo de 5, 10 está próximo de 9, mas 8 não está próximo de 4. Representemos por R essa relação estar próximo de.

**a.** Escreva $R$ como um conjunto de pares ordenados. Sua resposta deve apresentar-se como segue:

$$R = \{(x, y) : \ldots\}$$

**b.** Prove ou refute: $R$ é reflexiva.
**c.** Prove ou refute: $R$ é antirreflexiva.
**d.** Prove ou refute: $R$ é simétrica.
**e.** Prove ou refute: $R$ é antissimétrica.
**f.** Prove ou refute: $R$ é transitiva.

**13.3.** Determine $R^{-1}$ para cada uma das seguintes relações:

**a.** $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$
**b.** $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.
**c.** $R = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}, x - y = 1\}$
**d.** $R = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}, x|y\}$
**e.** $R = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}, xy > 0\}$

**13.4.** Suponhamos que $R$ e $S$ sejam relações e $R = S^{-1}$. Prove que $S = R^{-1}$.

**13.5.** Seja R uma relação sobre um conjunto $A$. Prove ou refute: se $R$ é antissimétrica, então $R$ é antirreflexiva.

**13.6.** Seja $R$ a relação tem o mesmo tamanho que definida sobre todos os subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}$ (isto é, $A\ R\ B$ se e somente se $|A| = |B|$). Quais das cinco propriedades (reflexiva, antirreflexiva, simétrica, antissimétrica e transitiva) $R$ possui? Prove suas respostas.

**13.7.** Considere a relação $\subseteq$ em $2^{\mathbb{Z}}$ (isto é, a relação é um subconjunto de definida em todos os conjuntos de inteiros). Que propriedades da Definição 13.7 $\subseteq$ possui? Prove suas respostas.

**13.8.** O que é $\leq^{-1}$?

**13.9.** A propriedade *antirreflexiva* não é a mesma que não reflexiva. Para ilustrar, faça o seguinte:

**a.** Dê um exemplo de relação em um conjunto que não seja nem reflexiva nem antirreflexiva.
**b.** Dê um exemplo de relação em um conjunto que seja ao mesmo tempo reflexiva e antirreflexiva.

A parte (a) não é muito difícil, mas, para (b), o leitor deverá criar um exemplo assaz estranho.

**13.10.** Uma forma interessante de dizer que $R$ é simétrica é $R = R^{-1}$. Prove isso (isto é, prove que uma relação $R$ é simétrica se e somente se $R = R^{-1}$).

**13.11.** Prove: uma relação $R$ em um conjunto $A$ é antissimétrica se e somente se

$$R \cap R^{-1} \subseteq \{(a, a) : a \in A\}$$

**13.12.** Dê um exemplo de uma relação que seja simétrica e transitiva, mas não reflexiva. Explique o que está errado na seguinte "prova".

> *Afirmação:* Se $R$ é simétrica e transitiva, então $R$ é reflexiva.
> *"Prova":* Suponhamos que $R$ seja simétrica e transitiva. Simétrica quer dizer que $x\ R\ y$ implica $y\ R\ x$. Aplicamos a transitividade a $x\ R\ y$ e a $y\ R\ x$, obtendo $x\ R\ x$. Portanto, $R$ é reflexiva. ■

**13.13.** *Ilustração de relações*. As figuras de objetos matemáticos constituem valiosos auxílios para a compreensão de conceitos. Há uma maneira assaz interessante de traçar a imagem de uma relação em um conjunto ou uma relação de um conjunto para outro.

Para traçar uma imagem de uma relação $R$ em um conjunto $A$, fazemos um diagrama em que cada elemento de $A$ é representado por um ponto. Se $a\ R\ b$, traçamos uma seta do ponto $a$ para o ponto $b$. Se acontece que $b$ também está relacionado com $a$, traçamos outra seta de $b$ para $a$. E, se $a\ R\ a$, traçamos uma seta em laço de $a$ para si mesmo.

Por exemplo, sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (4, 3), (3, 1)\}$. A primeira figura a seguir é uma ilustração da relação $R$ em $A$.

Para traçar uma imagem de uma relação de $A$ para $B$, traçamos dois conjuntos de pontos. O primeiro conjunto de pontos corresponde aos elementos em $A$; colocamos esses pontos à esquerda da figura. Os pontos correspondentes a $B$ aparecem à direita. Traçamos, então, uma seta de $a \in A$ para $b \in B$ sempre que $(a, b)$ estiver na relação.

Por exemplo, sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $R = \{4, 5, 6, 7\}$, e $S$ a relação $\{(1, 4), (1, 5), (2, 5), (3, 6)\}$. A segunda figura ilustra a relação $S$.

Trace ilustrações das seguintes relações:

**a.** Seja $A = \{a \in \mathbb{N} : a|10\}$ e seja $R$ a relação $|$ (divide) restrita a $A$.

**b.** Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e seja $R$ a relação menor que restrita a $A$.

**c.** Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e seja $R$ a relação $=$ (igual) restrita a $A$.

**d.** Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e seja $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Consideremos a relação $\geq$ (maior que ou igual a) de $A$ para $B$.

**e.** Sejam $A = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e seja $R = \{(a, b): a \in A, b \in B, a|b\}$.