Lista 11 de Matemática Discreta I – GAN00170 – 20132

14.1. Quais dos seguintes conjuntos são relações de equivalência?

a. $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ no conjunto $\{1, 2, 3\}$.

b. $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ no conjunto $\{1, 2, 3\}$.

c. $|$ em $\mathbb{Z}$.

d. $\leq$ em $\mathbb{Z}$.

e. $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ no conjunto $\{1, 2, 3\}$.

f. $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ no conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$.

g. É-um-anagrama-de no conjunto das palavras inglesas (por exemplo, STOP é um anagrama de POTS, porque podemos formar uma palavra a partir da outra mediante uma simples redisposição das letras).

14.2. Prove que, se x e y são ambos ímpares, então $x \equiv y$ (mód. 2).

Prove que, se x e y são ambos pares, então $x \equiv y$ (mód. 2).

14.3. Prove: se a é um inteiro, então $a \equiv -a$ (mód. 2).

14.4. Complete a prova do Teorema 14.5; isto é, prove que a congruência módulo n é transitiva.

14.5. Para cada relação de equivalência, ache a classe de equivalência pedida.

a. $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ em $\{1, 2, 3, 4\}$. Ache [1].

b. $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ em $\{1, 2, 3, 4\}$. Ache [4].

c. R é tem-o-mesmo-algarismo-das-dezenas no conjunto $\{x \in \mathbb{Z} : 100 < x < 200\}$. Determine [123].

d. R é tem-os-mesmos-pais-que no conjunto de todos os seres humanos. Ache [você].

e. R é tem-a-mesma-data-de-aniversário-que no conjunto de todos os seres humanos. Ache [você].

f. R é tem o mesmo tamanho que em $2^{\{1,2,3,4,5\}}$. Ache $[\{1, 3\}]$.

14.6. Consulte o Exemplo 14.7, em que discutimos a relação da congruência módulo 2 nos inteiros. Para essa relação, prove que $[1] = [3]$.

14.7. Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A. Prove que a união de todas as classes de equivalência de R é A.

Em símbolos, temos

$$\bigcup_{a \in A} [a] = A.$$

A notação $\bigcup$ à esquerda merece um comentário. É semelhante à notação desenvolvida na Seção 9. Ali, entretanto, tínhamos um índice que variava entre dois inteiros, como em

$$\bigcup_{k=1}^{n} (\text{conjuntos dependentes de } k)$$

A variável de apoio é k, e tomamos uma união de conjuntos que dependem de k quando k percorre os inteiros 1, 2, ..., n.

A situação aqui é ligeiramente diferente. A variável mudar não é necessariamente um inteiro. A notação é da forma

$$\bigcup_{a \in A} (\text{conjuntos que dependem de } a)$$

Isso significa que tomamos a união sobre todos os (conjuntos dependentes de a) possíveis, à medida que a percorre os vários membros de A.

Note que, nesse problema, a união pode ser redundante. É possível que $[a] = [a']$, onde a e a' são membros diferentes de A. Por exemplo, se R é congruência mód. 2 e $A = \mathbb{Z}$, então

$$\bigcup_{a \in \mathbb{Z}} [a] = \cdots \cup [-2] \cup [-1] \cup [0] \cup [1] \cup [2] \cup \cdots = [0] \cup [1] = \mathbb{Z}$$

porque $\ldots [-2] = [0] = [2] = \ldots$ e $\ldots = [-3] = [-1] = [1] = [3] = \ldots$

14.8. Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A e suponhamos $a, b \in A$.

Prove: $a \in [b] \Leftrightarrow b \in [a]$.

14.10. Sejam R e S relações de equivalência em um conjunto A. Prove que $R = S$ se e somente se as classes de equivalência de R são as mesmas que as de S.

14.11. Com referência ao Exercício 13.13 relativo ao traçado de ilustrações de relações, seja $A = \{1, 2, 3, ..., 10\}$. Faça o seguinte:

a. Trace três ilustrações de diferentes relações de equivalência em A.

b. Para cada relação de equivalência, liste todas as suas classes de equivalência.

c. Descreva com que "se parecem" as relações de equivalência.

14.12. Eis outra maneira de traçar a ilustração de uma relação de equivalência: trace as classes de equivalência. Por exemplo, considere a seguinte relação de equivalência em $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$R = \{(1, 1), (1, 2)\ (2, 1)\ (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}.$$

As classes de equivalência dessa relação em A são:

$$[1] = [2] = \{1, 2\}, [3] = \{3\}, \text{ e } [4] = [5] = [6] = \{4, 5, 6\}.$$

A ilustração da relação R, em vez de exibir setas de relação, simplesmente mostra as classes de equivalência de A. Os elementos de A estão encerrados em um círculo, que subdividimos em regiões para mostrar as classes de equivalência. Pelo Corolário 14.13, sabemos que as classes de equivalência de R são não vazias, disjuntas duas a duas, e contêm todos os elementos de A. Assim, na figura, as regiões não se superpõem e todo elemento de A acaba situando-se em exatamente uma região.

Para cada uma das relações de equivalência achadas no problema anterior, trace um diagrama das classes de equivalência.

14.13. Há apenas uma relação de equivalência possível em um conjunto de um elemento: se $A = \{1\}$, então $R = \{(1, 1)\}$ é a única relação de equivalência possível.

Há exatamente duas relações de equivalência possíveis em um conjunto de dois elementos: se $A = \{1, 2\}$, então $R_1 = \{(1, 1), (2, 2)\}$ e $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ são as únicas relações de equivalência em A.

Quantas relações de equivalência diferentes são possíveis em um conjunto de três elementos? E em um conjunto de quatro elementos?

14.14. Descreva as classes de equivalência da relação é semelhante a no conjunto de todos os triângulos.