Lista 13 de Matemática Discreta I – GAN00170 – 20132

16.1. Mixed Matched Marvin tem uma gaveta com 30 meias diferentes (não há duas iguais). Ele apanha duas meias ao acaso. De quantas maneiras pode fazê-lo? Em seguida, ele as calça em seus pés (presumivelmente, uma no pé direito, outra no esquerdo). De quantas maneiras pode fazer isso?

16.2. Vinte pessoas estão em uma reunião. Se cada uma aperta a mão de todas as outras exatamente uma vez, quantos apertos de mão se verificam?

16.3. **a.** Quantas sequências binárias (0, 1) de n algarismos contêm exatamente os k 1?

b. Quantas sequências ternárias (0, 1, 2) de n algarismos contêm exatamente os k 1?

16.4. Cinquenta corredores competem em uma corrida de 10 quilômetros. Quantos resultados diferentes são possíveis?

A resposta dessa questão depende do que estamos julgando. Ache diferentes respostas para essa questão, dependendo do contexto.

a. Queremos saber em que lugar cada corredor terminou a corrida.

b. A corrida é uma prova de qualificação, e desejamos apenas saber quais são os dez corredores mais rápidos.

c. A corrida é um evento olímpico final e só nos interessa quem ganha as medalhas de ouro, de prata e de bronze.

16.5. Escreva todos os subconjuntos de três e de quatro elementos de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ em duas colunas. Emparelhe cada subconjunto de três elementos com seu complemento. Sua tabela deve ter 35 linhas.

16.6. Um tipo especial de fechadura tem um painel com cinco botões rotulados com os algarismos de 1 a 5. A fechadura se abre mediante uma sequência de três ações. Cada ação consiste em apertar um dos botões ou apertar simultaneamente dois deles.

Por exemplo, 12-4-3 é uma combinação possível. A combinação 12-4-3 é a mesma que 21-4-3 porque 12 ou 21 simplesmente significam que devemos apertar simultaneamente os botões 1 e 2.

a. Quantas são as combinações possíveis?

b. Quantas são as combinações possíveis, se nenhum algarismo é repetido na combinação?

16.7. De quantas maneiras diferentes podemos fazer uma partição de um conjunto de n elementos em duas partes, se uma das partes deve ter quatro elementos e a outra parte deve ter todos os elementos restantes?

16.8. Atente para a coluna do meio de um triângulo de Pascal. Note que, à exceção do 1 do topo, todos esses números são pares. Por quê?

16.9. Aplique o Teorema 16.12 para provar a Proposição 16.7.

16.10. Prove que a soma dos números da n-ésima linha do triângulo de Pascal é 2^n.

Uma maneira fácil de resolver isso consiste em fazer $x = y = 1$ no teorema binomial (Teorema 16.8).

O leitor deve, entretanto, dar uma prova combinatória, ou seja, provar que

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

encontrando uma pergunta que seja respondida corretamente por ambos os membros dessa equação.

16.11. Aplique o teorema binomial (Teorema 16.8) para provar que

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots \pm \binom{n}{n} = 0$$

desde que $n > 0$.

Transfira todos os termos negativos para o membro direito, o que dá:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots.$$

Dê uma descrição combinatória do que isso significa e transforme-a em uma prova combinatória. Aplique o método do "elemento estranho".

16.12. Considere a fórmula a seguir:

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

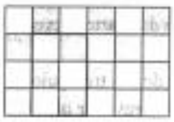
Dê duas demonstrações diferentes: uma delas deve utilizar a fórmula fatorial para $\binom{n}{k}$ (Teorema 16.12); a outra deve ser do tipo combinatório. Elabore uma questão que possa ser respondida por ambos os membros da equação.

16.13. Sejam $n \geq k \geq m \geq 0$ inteiros. Considere a seguinte fórmula:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}.$$

Dê duas demonstrações diferentes. Uma delas deve utilizar a fórmula fatorial para $\binom{n}{k}$ (Teorema 16.12); a outra deve ser combinatória. Procure elaborar uma questão que seja respondida por ambos os membros da equação.

16.14. Quantos retângulos podemos formar com um tabuleiro de xadrez de $m \times n$ casas? Por exemplo, com um tabuleiro 2×2, há nove retângulos possíveis.



16.15. Seja n um número natural. Dê uma prova combinatória da expressão:

$$\binom{2n+2}{n+1} = \binom{2n}{n+1} + 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}.$$

16.16. Aplique a fórmula de Stirling (ver Exercício 8.6) para obter uma fórmula de aproximação para $\binom{2n}{n}$. Sem utilizar a fórmula de Stirling, prove diretamente por que $\binom{2n}{n} \leq 4^n$.

16.17. Aplique a fórmula do fatorial para $\binom{n}{k}$ (Teorema 16.12) para provar a identidade de Pascal (Teorema 16.10).

16.18. Prove

$$\binom{n}{3} = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{n-1}{2}.$$

Sugestão: Imite o argumento da Proposição 16.5.

16.19. *Continuação do problema anterior.* A Proposição 16.5 afirma que $\binom{n}{2} = 1 + 2 + \ldots + (n-1)$. Faça uma grande cópia do triângulo de Pascal e assinale os números $\binom{7}{2}$, 6, 5, 4, 3, 2 e 1. O leitor tem várias escolhas. Faça a escolha "correta". Qual é o padrão?

O exercício anterior pede que provemos $\binom{n}{3} = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \ldots + \binom{n-1}{2}$. Em uma grande cópia do triângulo de Pascal, assinale os números $\binom{7}{3}$, $\binom{6}{2}$, $\binom{5}{2}$, $\binom{4}{2}$, $\binom{3}{2}$ e $\binom{2}{2}$. Qual é o padrão?

Generalize, agora, essas fórmulas e prove sua asserção.

16.20. Dê uma demonstração geométrica e uma demonstração algébrica de que

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = n^2.$$

16.21. Prove: $\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1}\binom{n}{1} + \binom{n}{n}\binom{n}{0} = \binom{2n}{n}$.

16.22. Quantos números do Seguro Social (ver Exercício 7.9) têm seus nove algarismos dispostos em ordem estritamente crescente?

Nos problemas seguintes, introduzimos o conceito de *coeficientes multinomiais*.

16.23. O coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ é o número de subconjuntos de k elementos de um conjunto de n elementos. Eis outra maneira de encarar $\binom{n}{k}$. Suponha A um conjunto de n elementos e que tenhamos à nossa disposição um grupo de rótulos: temos k rótulos marcados como "bons" e $n-k$ rótulos marcados como "maus". De quantas maneiras podemos afixar exatamente um rótulo em cada elemento de A?

16.24. Seja A um conjunto de n elementos. Suponha que tenhamos três tipos de rótulo para afixar nos elementos de A. Podemos classificar esses rótulos como "bons", "maus" e "feios", ou, então, dar-lhes nomes menos interessantes como "Tipo 1", "Tipo 2" e "Tipo 3".

Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$. Definamos o símbolo $\binom{n}{a\ b\ c}$ como o número de maneiras como podemos rotular os elementos de um conjunto de n elementos com três tipos de rótulo, em que atribuímos rótulos Tipo 1 a exatamente a elementos, rótulos Tipo 2 a b elementos e rótulos Tipo 3 a c elementos.

Com base nos primeiros princípios, calcule:

a. $\binom{3}{1\ 1\ 1}$.
b. $\binom{10}{1\ 2\ 5}$.
c. $\binom{5}{0\ 5\ 0}$.
d. $\binom{10}{7\ 3\ 0}$.
e. $\binom{10}{5\ 2\ 3} - \binom{10}{2\ 3\ 5}$.

16.25. Sejam $n, a, b, c \in \mathbb{N}$, com $a + b + c = n$. Prove:

a. $\binom{n}{a\ b\ c} = \binom{n}{a}\binom{n-a}{b}$.
b. $\binom{n}{a\ b\ c} = \frac{n!}{a!b!c!}$.
c. Se $a + b + c \neq n$, então $\binom{n}{a\ b\ c} = 0$

16.26. Seja $n \in \mathbb{N}$. Prove

$$(x + y + z)^n = \sum_{a+b+c=n} \binom{n}{a\ b\ c} x^a y^b z^c$$

em que o somatório se estende por todos os números naturais a, b, c, com $a + b + c = n$.

16.27. Uma mão de pôquer consiste em cinco cartas escolhidas de um baralho-padrão de 52 cartas. Quantas mãos de pôquer diferentes são possíveis?

Se dividirmos as respostas desse problema por $\binom{52}{5}$ (a resposta do problema anterior), teremos a *probabilidade* de uma mão de pôquer selecionada aleatoriamente ser do tipo descrito. O conceito de probabilidade está estabelecido no Capítulo 6.

16.28. *Pôquer – continuação.* Há diversas mãos especiais que um jogador pode receber no pôquer. Para cada tipo a seguir, conte o número de mãos que têm aquele tipo.

a. Quatro de um tipo. A mão contém quatro cartas do mesmo valor numérico (por exemplo, quatro valetes) e outra carta.
b. Três de um tipo: a mão contém três cartas do mesmo valor numérico e duas outras cartas com outros valores numéricos.
c. *Flush*: a mão contém cinco cartas todas do mesmo naipe.
d. *Full house*: a mão contém três cartas de um valor e duas cartas de outro valor.
e. *Straight*: as cinco cartas têm valores numéricos consecutivos, como 7-8-9-10-valete. Considere o ás acima do rei, mas não abaixo do 2. Os naipes não interessam.
f. *Straight flush*: a mão é um *straight* e um *flush*.

16.29. Não tem sentido calcular $(x + y)^{20}$ desenvolvendo a expressão com seus inúmeros termos e grupando os termos semelhantes. Uma forma muito melhor é calcularmos $(x + y)^2$ e grupar os termos semelhantes. Multiplica-se, então, o resultado por $(x + y)$ e grupam-se os termos semelhantes, obtendo-se $(x + y)^3$. Multiplicamos novamente por $(x + y)$, e assim por diante, até atingirmos $(x + y)^{20}$. Compare esse método com o método de geração de todo o triângulo de Pascal até a 20ª linha.