Lista 14 de Matemática Discreta I

17.1. Calcule $\left(\!\binom{3}{2}\!\right)$ e $\left(\!\binom{2}{3}\!\right)$ listando explicitamente todos os multiconjuntos possíveis do tamanho apropriado. Certifique-se de que sua resposta concorda com a fórmula do Teorema 17.8.

17.2. Dê uma representação do tipo estrelas e barras para todos os conjuntos encontrados no exemplo anterior.

17.3. Seja n um inteiro positivo. Calcule o seguinte, a partir dos primeiros princípios (isto é, não utilize a Proposição 17.6).

a. $\left(\!\binom{0}{n}\!\right)$.

b. $\left(\!\binom{n}{0}\!\right)$.

c. $\left(\!\binom{0}{0}\!\right)$.

Explique suas respostas.

17.4. Que multiconjunto é codificado pela notação "estrelas e barras" *|||*** ?

17.5. Expresse $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ em notação fatorial.

17.6. Prove:

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \left(\!\binom{k+1}{n-1}\!\right).$$

17.7. Denotemos por $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ o número de multiconjuntos de cardinalidade k que podemos formar escolhendo os elementos em $\{1, 2, 3, ..., n\}$, com a condição adicional de utilizarmos cada um desses n elementos ao menos uma vez no multiconjunto.

a. Calcule $\left[\!\left[{n \atop n}\right]\!\right]$ pelos primeiros princípios.

b. Prove: $\left[\!\left[{n \atop k}\right]\!\right] = \left(\!\binom{n}{k-n}\!\right)$.

17.8. Sejam n, k inteiros positivos. Prove:

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \left(\!\binom{n-1}{0}\!\right) + \left(\!\binom{n-1}{1}\!\right) + \left(\!\binom{n-1}{2}\!\right) + \cdots + \left(\!\binom{n-1}{k}\!\right).$$

17.9. Sejam n, k inteiros positivos. Prove:

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \left(\!\binom{1}{k-1}\!\right) + \left(\!\binom{2}{k-1}\!\right) + \cdots + \left(\!\binom{n}{k-1}\!\right).$$

17.10. Seja x um inteiro positivo. Podemos escrever:

$$\binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x.$$

Dessa forma, podemos encarar $\binom{x}{2}$ como um *polinômio* em x. Assim, embora não tenha sentido como um problema de contagem, podemos escrever $\binom{\frac{1}{3}}{2}$ que equivale a $\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^2 - \frac{1}{2}(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{9}$.

a. Escreva $\left(\!\binom{x}{2}\!\right)$ como um polinômio em x.

b. Por mais estranho que possa parecer, calcule

$$\left(\!\binom{-\frac{1}{2}}{2}\!\right).$$

c. Escreva $\binom{x}{3}$ e $\left(\!\binom{x}{3}\!\right)$ como polinômios em x.

d. Seja $k \in \mathbb{N}$. Ache (e prove) uma relação entre os polinômios $\binom{x}{k}$ e $\left(\!\binom{x}{k}\!\right)$.