Lista 15 de Matemática Discreta I

18.3. Quantas "palavras" de cinco letras podemos formar sem duas letras consecutivas iguais? Uma "palavra" pode ser qualquer lista das 26 letras-padrão, de modo que WENJW seja uma palavra que deva ser contada, mas NUTTY não o seja.

Eis uma solução fácil: pelos métodos de contagem de listas da Seção 7, a resposta é $26 \times 25 \times 25 \times 25 \times 25 = 26 \times 25^4$.

Dê uma solução complicada incluindo inclusão-exclusão e mostre que as duas soluções coincidem.

18.4. Nesse problema, o leitor deve dar duas provas para

$$9^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 10^{n-k}.$$

a. Na primeira prova deve ser usado o teorema binomial (ver Teorema 16.8).

b. A segunda prova deve ser combinatória, utilizando a inclusão-exclusão.

18.5. Quantos números de seis algarismos não têm três algarismos consecutivos iguais? (Nesse problema, podemos considerar números de seis algarismos cujos algarismos iniciais sejam 0. Assim, devem ser contados 012345 e 001122, mas não 000987 ou 122234.)

18.6. Note o seguinte: $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|$. Obtenha uma fórmula geral para o tamanho da intersecção de vários conjuntos finitos em termos dos tamanhos de suas uniões

Autoteste

1. Seja R a relação no conjunto de todos os seres humanos (não apenas os que fazem parte de sua família) definido por $x\,R\,y$, se e somente se x for um dos pais de y.

a. Se x for você, descreva o conjunto de pessoas $\{y : x\,R\,y\}$.

b. Se y for você, descreva o conjunto de pessoas $\{y : x\,R\,y\}$.

c. Determine qual das seguintes propriedades é satisfeita por R: reflexiva, irreflexiva, simétrica, assimétrica, transitiva.

d. Descreva R^{-1}.

2. Qual das seguintes relações de R definidas no conjunto de todos os seres humanos (não apenas os que fazem parte de sua família) são relações de equivalência?

a. $x\,R\,y$, contanto que x e y sejam filhos da mesma mãe.

b. $x\,R\,y$, contanto que x e y sejam filhos da mesma mãe e do mesmo pai.

c. $x\,R\,y$, contanto que x e y tenham pelo menos um dos pais em comum.

3. Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Quantas relações diferentes em A existem?

4. Seja x e y números inteiros. Suponha que $x \equiv y \pmod{10}$ e $x \equiv y \pmod{11}$. Estes significam que $x = y$?

5. Seja $R \equiv \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}\ [x] = [y]\}$.

a. Prove que R é uma relação de equivalência nos inteiros.

b. Encontre as classes de equivalência [5], [−2] e [0].

6. Seja $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$ e $R = \{A \times A\} \cup \{B \times B\}$. Observe que R é uma relação de equivalência em $A \cup B$. Encontre todas as classes de equivalência de R.

7. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; defina uma relação de equivalência R em 2^A por $X\,R\,Y$, se e somente se $[X] = [Y]$. Quantas classes de equivalência R apresenta?

8. Seja $\mathcal{P} = \{N, \mathbb{Z}, P\}$ uma partição dos inteiros, $\mathbb{Z}$ definido por
   - $N = \{x \in \mathbb{Z} : x < 0\}$
   - $Z = \{0\}$ e
   - $P = \{x \in \mathbb{Z} : x > 0\}$.

Descreva a relação de equivalência $\overset{\mathcal{P}}{\equiv}$. Sua resposta deve ser da seguinte forma: "Suponha que x e y sejam inteiros. Então $x \overset{\mathcal{P}}{\equiv} y$ se e somente se ...."

9. Dez casais estão sentados em volta de uma grande mesa circular. De quantas maneiras diferentes eles podem se sentar, supondo que os maridos e as esposas se sentem próximos uns dos outros? Observe que, se todos se deslocarem em um (ou mais) lugares para a esquerda, a disposição não é considerada diferente.

10. As letras na palavra ELECTRICITY são misturadas para compor duas palavras, provavelmente sem sentido (por exemplo, TREEL CICTY). Quantos anagramas desse tipo são possíveis?

11. Duas crianças estão brincando de jogo da velha. De quantas maneiras os dois primeiros movimentos podem ser realizados?

    Uma possível resposta é $9 \times 8 = 72$, visto que há 9 locais para que o primeiro jogador marque X e, para cada opção desse tipo, 8 locais para o segundo jogador marcar 0.

    Contudo, por causa da simetria, alguns desses pares de abertura de movimento são os mesmos. Por exemplo, o primeiro jogador escolhe um quadrado da ponta e o segundo escolhe o central, na realidade não importa nada qual canto o primeiro jogador escolhe.

    Levando isso em consideração, de quantas formas distintas os dois primeiros movimentos podem ser realizados?

12. Há 21 alunos em uma aula de química. Os alunos devem formar pares para trabalhar como parceiros de laboratório, mas, obviamente, um aluno sobrará para trabalhar sozinho. De quantas maneiras os alunos podem formar pares?

13. Seja $A = \{1, 2, 3, ..., 100\}$. Quantos subconjuntos de 10 elementos de A consistem de apenas números ímpares?

14. A expressão $(x + 2)^{50}$ é expandida. Qual é o coeficiente de x^{17}?

15. Seja n um inteiro positivo. Simplifique a seguinte expressão:

$$n + (n + 1) + (n + 2) + ... + (2n).$$

16. Em uma escola de 200 crianças, 15 alunos são escolhidos para fazer parte da equipe de matemática da escola e, desses, 2 alunos são escolhidos como co-capitães. De quantas maneiras isso pode ser feito?

17. Seja n e k inteiros positivos com $k + 2 \leq n$. Prove a identidade

$$\binom{n+2}{k+2} = \binom{n}{k} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2}$$

Seguindo os dois métodos a seguir: combinatoriamente ou utilizando a Identidade de Pascal (Teorema 16.10).

18. Uma pizzaria oferece dez tipos diferentes de recheios. Ao pedir uma pizza de quatro sabores, você pode escolher quatro recheios para a sua pizza.

a. Quantas pizzas de quatro sabores diferentes podem ser feitas se for obrigatório que os quatro recheios sejam diferentes?

b. Quantas pizzas de quatro sabores diferentes podem ser feitas se os recheios puderem ser repetidos (por exemplo, cebolas, azeitonas e dois cogumelos, ou três anchovas e alho).

19. Seja n um inteiro positivo. Quantos multiconjuntos diferentes podem ser criados utilizando os números de 1 a n, onde cada um é utilizado por, no máximo, três vezes? Certifique-se de justificar sua resposta.

Por exemplo, se $n = 5$, então contaríamos $\{1, 2, 2, 3\}$ e $\{1, 2, 3, 4, 4, 4 ,5\}$, mas não contaríamos $\{1, 2, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4\}$ {quatros demais} ou $\{3, 4, 6\}$ (6 não está na faixa de 1 a n).

20. Os quadrados de um tabuleiro 4×4 são coloridos em preto e branco. Utilize a inclusão--exclusão para encontrar o número de maneiras em que o tabuleiro pode ser colorido, de forma que nenhuma fileira seja inteiramente de uma única cor.

Explique por que sua expressão é simplificada para 14^4.