Lista 23

23.1. Para cada uma das relações seguintes, responda:

(1) É uma função? Se não for, explique por que e pare. Caso contrário, continue com as questões restantes.

(2) Quais são seus domínio e imagem?

(3) A função é um para um? Se não for, explique por que e pare. Caso contrário, responda à questão seguinte.

(4) Qual é sua função inversa?

a. $\{1, 2), (3, 4)\}$

b. $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}, y = 2x\}$

c. $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}, x + y = 0\}$

d. $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}, xy = 0\}$

e. $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}, y = x^2\}$

f. $\varnothing$

g. $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}, x^2 + y^2 = 1\}$

h. $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}, x|y\}$

i. $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}, x|y \text{ e } y|x\}$

j. $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}, \binom{x}{y} = 1\}$

23.2. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$. Escreva todas as funções $f: A \to B$. Indique quais são um para um e quais são sobre B.

23.3. Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Escreva todas as funções $f: A \to B$. Indique quais são um para um e quais são sobre B.

23.4. Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{3, 4\}$. Escreva todas as funções $f: A \to B$. Indique quais são um para um e quais são sobre B.

23.5. Determine $f(2)$ para cada uma das funções seguintes.

a. $f = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}, x + y = 0\}$

b. $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2)\}$

c. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por $f(x) = (x + 1)^{(x+1)}$

d. $f = \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1\}$

e. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por $f(x) = n!$.

23.6. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{5, 6, 7\}$. Seja f a relação

$$f = \{(1, 5), (2, 5), (3, 6), (?, ?)\}$$

em que as duas interrogações devem ser determinadas por você. Seu trabalho final consiste em achar substitutos para (?, ?) de modo que as proposições seguintes sejam verdadeiras. [Esperam-se três respostas diferentes para cada um dos itens (a), (b) e (c). O par ordenado (?, ?) deve pertencer a $A \times B$.]

a. A relação f não é uma função.

b. A relação f é uma função de A para B mas não sobre B.

c. A relação f é uma função de A para B e é sobre B.

A despeito do fato de a frase "f é sobre" não ter sentido isoladamente, os matemáticos utilizam-na frequentemente. Ela tem sentido se temos em vista determinado par de conjuntos A e B com $f: A \to B$. Nesse contexto, "f é sobre" significa "f é sobre B".

23.7. Consideremos as duas afirmações a seguir sobre uma função f:

a. f é sobre.

b. $f: A \to B$ é sobre.

Explique por que (a), ao contrário de (b), não tem sentido.

23.8. A função seno é uma função para os números reais e dos números reais; isto é, sen : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A função seno não é nem um para um nem sobre. Não obstante, a função arcsen, sen^{-1}, é conhecida como sua função inversa.

Explique.

23.9. Para cada caso a seguir, determine se a função é um para um, sobre, ou ambos. Prove suas afirmações.

a. $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = 2x$.

b. $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = 10 + x$.

c. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(x) = 10 + x$.

d. $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{se x é ímpar} \\ \frac{x-1}{2} & \text{se x é par.} \end{cases}$$

e. $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definida por $f(x) = x^2$.

23.10. Prove as Proposições 23.14 e 23.15.

23.11. Sejam A e B conjuntos finitos e $f: A \to B$. Prove que duas quaisquer das afirmações seguintes acarretam a terceira.

a. f é um para um.

b. f é sobre.

c. $|A| = |B|$

23.12. Dê um exemplo de um conjunto A e uma função $f: A \to A$, em que f é sobre, mas não um para um.

Dê um exemplo em que f é um para um, mas não sobre.

Seus exemplos contradizem o exercício anterior?

23.13. Suponha que $f: A \to B$ seja uma bijeção. Prove que $f^{-1}: B \to A$ também é uma bijeção.

23.14. Seja A um conjunto de n elementos e seja $k \in \mathbb{N}$. Quantas funções $f: A \to \{0, 1\}$ existem, para as quais há exatamente k elementos a em A com $f(a) = 1$?

23.15. Seja A um conjunto de n elementos e sejam $i, j, k \in \mathbb{N}$ com $i + j + k = n$. Quantas funções $f: A \to \{0, 1, 2\}$ existem para as quais há exatamente i elementos $a \in A$ com $f(a) = 0$, exatamente j elementos $a \in A$ com $f(a) = 1$ e exatamente k elementos $a \in A$ com $f(a) = 2$?