Lista 24

24.1. Seja $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ uma sequência de cinco inteiros distintos. Diremos que essa sequência é crescente de $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ e decrescente se $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5$. Outras sequências podem apresentar padrões diferentes de <s e >s. Na sequência (1, 5, 2, 3, 4), temos $1 < 5 > 2 < 3 < 4$. Diferentes sequências podem apresentar o mesmo padrão de <s e >s entre seus elementos. Por exemplo, (1, 5, 2, 3, 4) e (0, 6, 1, 3, 7) têm o mesmo padrão de <s e >s, conforme ilustrado a seguir:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & < & 5 & > & 2 & < & 3 & < & 4 \\ & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 0 & < & 6 & > & 1 & < & 3 & < & 7 \end{array}$$

Dada uma coleção de 17 sequências de cinco inteiros distintos, prove que duas delas têm o mesmo padrão de <s e >s.

24.2. Dois números de matrícula no Seguro Social (ver Exercício 7.9) *empatam nos zeros* quando um algarismo de um número é zero se e somente se o algarismo correspondente do outro também é zero. Por exemplo, os números do Seguro Social 120-90-1109 e 430-20-5402 têm zeros empatados.

Prove: Dada uma coleção de 513 números de registro no Seguro Social, deve haver dois com zeros empatados.

24.3. Dado um conjunto de sete inteiros positivos distintos, prove que existe um par cuja soma ou cuja diferença é um múltiplo de 10. O leitor pode utilizar o fato de que, se o algarismo das unidades de um inteiro é 0, então o inteiro é divisível por 10.

24.4. Consideremos um quadrado cujo lado tem comprimento um. Suponha que escolhamos cinco pontos nesse quadrado. Prove que existem dois pontos cuja distância é, no máximo, $\sqrt{2}/2$.

24.5. Mostre que a Proposição 24.2 é a melhor possível exibindo quatro pontos reticulados no plano de modo que nenhum dos pontos médios dos segmentos determinados por eles seja ponto reticulado.

24.6. Ache e prove uma generalização da Proposição 24.2 para três dimensões.

24.7. Ache uma sequência de nove inteiros distintos que não contenha uma subsequência monótona de comprimento quatro.

Generalize sua construção mostrando como construir (para todo inteiro positivo n) uma sequência de n^2 inteiros distintos que não contenha uma subsequência monótona de comprimento $n + 1$.

24.8. Escreva um programa de computador que tenha como entrada uma sequência de inteiros distintos e, como saída, o comprimento da mais longa subsequência monótona.

24.9. Seja $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} -n/2 & \text{se } n \text{ se é par e} \\ (n+1)/2 & \text{se } n \text{ se é impar.} \end{cases}$$

Prove que f é uma bijeção.

24.10. Denote por E o conjunto dos inteiros pares. Ache uma bijeção entre E e $\mathbb{Z}$.