Lista 25

25.1. Listamos a seguir vários pares de funções f e g. Para cada par:

- Determine qual das duas é definida, $g \circ f$ ou $f \circ g$.
- Se uma ou ambas forem definidas, ache a(s) função(ões) resultante(s).
- Se ambas forem definidas, determine se $g \circ f = f \circ g$ ou não.

a. $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ e $g = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$
b. $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ e $g = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$
c. $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ e $g = \{(1, 2), (2, 0), (3, 5), (4, 3)\}$
d. $f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 3), (4, 1)\}$ e $g = \{(1, 1), (2, 1), (3, 4), (4, 4)\}$
e. $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 1)\}$ e $g = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 1), (5, 2)\}$
f. $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x^2 + 1$ (ambos para todo $x \in \mathbb{Z}$)
g. $f(x) = x + 3$ e $g(x) = x - 7$ (ambos para todo $x \in \mathbb{Z}$)
h. $f(x) = 1 - x$ e $g(x) = 2 - x$ (ambos para todo $x \in \mathbb{Q}$)
i. $f(x) = \frac{1}{x}$ para $x \in$ Q, exceto $x = 0$ e $g(x) = x + 1$ para todo $x \in \mathbb{Q}$
j. $f = \mathrm{id}_A$ e $g = \mathrm{id}_B$, quando $A \subseteq B$ mas $A \neq B$

25.2. Considere as funções f e g. Prove que $f = g$ (como conjuntos) se e somente se dom f = dom g e, para todo x em seu domínio comum, $f(x) = g(x)$. Isso justifica o Esquema de prova 22.

25.3. Dados os conjuntos A e B, prove que $A = B$ se e somente se $\mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B$.

25.4. Qual é a diferença entre a função identidade definida em um conjunto A e a relação é igual a definida em A?

25.5. Complete a prova da Proposição 25.8.

25.6. Prove a Proposição 25.9.

25.7. Sejam A e B conjuntos e f e g funções com $f: A \to B$ e $g: B \to A$.

Prove: Se $g \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ g = \mathrm{id}_B$, então f é invertível e $g = f^{-1}$.

Nota: Esse resultado é uma recíproca da Proposição 25.9.

25.8. Seja $f: A \to B$ uma bijeção. Explique por que as seguintes igualdades são *incorretas*:

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_A \quad \text{e} \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_B$$

25.9. Sejam os conjuntos A, B e C e $f: A \to B$ e $g: B \to C$. Prove:

a. Se f e g são um para um, também o é $g \circ f$.
b. Se f e g são sobre, $g \circ f$ também é sobre.
c. Se f e g são bijeções, também o é $g \circ f$.

25.10. Determine um par de funções f e g, do conjunto A para si mesmo, de modo $f \circ g = g \circ f$. Qualquer um dos casos a seguir serve:

- Escolha f e g como a mesma função.
- Escolha f ou g como id_A.
- Escolha $g = f^{-1}$.

Estes são muito fáceis. Ache outro exemplo.

25.11. Sejam A um conjunto e f uma função com $f : A \to A$.

a. Suponha que f seja um para um. Deve f ser sobre?

b. Suponha que f seja sobre. Deve f ser um para um?

Justifique sua resposta.

25.12. Suponha que $f : A \to A$ e $g : A \to A$ sejam ambas bijeções. Prove ou refute:

a. $g \circ f$ é uma bijeção de A para si mesmo.

b. $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

c. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

25.13. Sejam A um conjunto e $f : A \to A$. Então, $f \circ f$ é também uma função de A para si mesmo; também o é $f \circ f \circ f$.

Representemos por $f^{(n)}$ a composição de ordem n de f consigo mesma; isto é

$$f^{(n)} = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ vezes}}.$$

Naturalmente, $f^{(1)} = f$

Note que $f^{(n)}(x)$ não significa $[f(x)]^n$. Por exemplo, se $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$, então $f^{(2)}(x) = f[f(x)] = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}x + 1] + 1 = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$. Isso não é o mesmo que $[f(x)]^2 = (\frac{1}{2}x + 1)^2 = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$.

a. Estabeleça um significado aceitável para $f^{(0)}$.

b. Se $f, g : A \to A$, devemos ter $(g \circ f)^{(2)} = g^{(2)} \circ f^{(2)}$? Prove ou refute.

c. Se f é invertível, deve ser $(f^{-1})^{(n)} = (f^{(n)})^{-1}$? Prove ou refute.

A melhor maneira de responder às questões a seguir é com o auxílio de um computador.

d. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2{,}8x(1 - x)$. Considere a sequência de valores:

$$f(\tfrac{1}{2}),\ f^{(2)}(\tfrac{1}{2}),\ f^{(3)}(\tfrac{1}{2}),\ f^{(4)}(\tfrac{1}{2}),\ \ldots.$$

Descreva o comportamento a longo prazo desses números.

e. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3{,}1x(1 - x)$. Considere a sequência de valores:

$$f(\tfrac{1}{2}),\ f^{(2)}(\tfrac{1}{2}),\ f^{(3)}(\tfrac{1}{2}),\ f^{(4)}(\tfrac{1}{2}),\ \ldots.$$

Descreva o comportamento a longo prazo desses números.

f. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3{,}9x(1 - x)$. Considere a sequência de valores:

$$f(\tfrac{1}{2}),\ f^{(2)}(\tfrac{1}{2}),\ f^{(3)}(\tfrac{1}{2}),\ f^{(4)}(\tfrac{1}{2}),\ \ldots.$$

Descreva o comportamento em longo prazo desses números.