# Lista 26

## 26 Exercícios

**26.1.** Considere a permutação $\pi = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & 5 & 3 & 8 & 9 & 7 \end{bmatrix}$. Expresse $\pi$ em tantas formas quantas for possível, incluindo as seguintes:

**a.** Como um conjunto de pares ordenados. (Nunca se esqueça: uma permutação é uma função, e as funções são conjuntos de pares ordenados.)

**b.** Como uma tabela de duas colunas.

**c.** Em notação de ciclo (ciclo disjunto).

**d.** Como a composição de transposições.

**e.** Como um diagrama com duas coleções de pontos para os números 1 a 9 (uma coleção à esquerda e uma coleção à direita) com setas da esquerda para a direita.

**f.** Como um diagrama com uma coleção de pontos para os números 1 a 9 com setas de $i$ para $\pi(i)$ para cada $i = 1, 2, ..., 9$.

**26.2.** Expresse as permutações a seguir em forma de ciclo disjunto.

**a.** $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

**b.** $\pi = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$.

**c.** $\pi \circ \pi$, em que $\pi$ é a permutação da parte (b) anterior.

**d.** $\pi^{-1}$, em que $\pi$ é a permutação da parte (b) anterior.

**e.** $\iota \in S_5$

**f.** $(1, 2) \circ (2, 3) \circ (3, 4) \circ (4, 5) \circ (5, 1)$

**26.3.** Quantas permutações em $S_n$ têm exatamente um ciclo?

**26.4.** Quantas permutações em $S_n$ não têm ciclo de comprimento um em sua notação em ciclos disjuntos?

**26.5.** Sejam $\pi, \sigma, \tau \in S_9$ dadas por

$$\pi = (1)(2, 3, 4, 5)(6, 7, 8, 9)$$
$$\sigma = (1, 3, 5, 7, 9, 2, 4, 6, 8), \quad \text{e}$$
$$\tau = (1, 9)(2, 8)(3, 5)(4, 6)(7)$$

Calcule:

**a.** $\pi \circ \sigma$

**b.** $\sigma \circ \pi$

**c.** $\pi \circ \pi$

**d.** $\pi^{-1}$

**e.** $\sigma^{-1}$

**f.** $\tau \circ \tau$

**g.** $\tau^{-1}$

**26.6.** Prove ou refute: Para todo $\pi, \sigma \in S_n$, $\pi \circ \sigma = \sigma \circ \pi$

**26.7.** Prove ou refute: Se $\tau$ e $\sigma$ são transposições, então $\tau \circ \sigma = \sigma$_ $\tau$

**26.8.** Prove ou refute: Para todo $\pi, \sigma \in S_n$, $(\pi \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \pi^{-1}$

**26.9.** Prove ou refute: Para todo $\pi, \sigma \in S_n$, $(\pi \circ \sigma)^{-1} = \pi^{-1} \circ \sigma^{-1}$

**26.10.** Prove ou refute: Uma permutação $\tau$ é uma transposição se e somente se $\tau \neq \iota$ e $\tau = \tau^{-1}$.

**26.11.** Sejam $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_a$ transposições, e suponhamos

$$\pi = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_a$$

Prove:

$$\pi_{-1} = \tau_a \circ \tau_{a-1} \circ \ldots \circ \tau_1$$

**26.12.** Seja $\pi = (1, 2)(3, 4, 5, 6, 7)(8, 9, 10, 11)(12) \in S_{12}$. Determine o menor inteiro positivo $k$ de modo

$$\pi^{(k)} = \underbrace{\pi \circ \pi \circ \cdots \circ \pi}_{k \text{ vezes}} = \iota.$$

Generalize. Se os ciclos disjuntos de $\pi$ têm comprimentos $n_1, n_2, ..., n_t$, qual é o menor inteiro $k$ de modo $\pi^{(k)} = \iota$?

**26.13.** Embora as permutações se expressem de maneira única como permutações disjuntas, há certa escolha da maneira em que as permutações podem ser escritas. Por exemplo,

$$\begin{aligned}(1, 3, 9, 2)(7)(4, 6, 5, 8) &= (7)(2, 1, 3, 9)(5, 8, 4, 6)\\ &= (6, 5, 8, 4)(3, 9, 2, 1)(7)\end{aligned}$$

Delineie uma forma-padrão para escrever permutações como ciclos disjuntos que facilite a verificação se duas permutações forem a mesma.

**26.14.** Prove: Se $\pi, \sigma \in S_n$ e $\pi \circ \sigma = \sigma$, então $\pi = \iota$

**26.15.** Sejam $\pi, \sigma, \tau \in S_n$ e suponhamos $\pi \circ \sigma = \pi \circ \tau$. Prove que $\sigma = \tau$

**26.16.** Para cada uma das permutações a seguir:

(1) Escreva a permutação como uma composição de transposições.

(2) Ache o número de inversões.

(3) Determine se a permutação é par ou ímpar.

**a.** $(1, 2, 3, 4, 5)$

**b.** $(1, 3)(2, 4, 5)$

**c.** $[(1, 3)(2, 4, 5)]^{-1}$

**d.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

**26.17.** Prove: O número de inversões em uma permutação é igual ao número de inversões em sua inversa.

**26.18.** Prove:

**a.** A composição de duas permutações pares é par.

**b.** A composição de duas permutações ímpares é par.

**c.** A composição de uma permutação par e uma permutação ímpar é ímpar.

**d.** A inversa de uma permutação par é par.

**e.** A inversa de uma permutação ímpar é ímpar.

**f.** Para $n > 1$, o número de permutações ímpares em $S_n$ é igual ao número de permutações pares em $S_n$.

**26.19.** Suponha que uma permutação $\pi$ seja escrita como uma coleção disjunta de ciclos de comprimentos $n_1, n_2, ..., n_t$. Com base apenas nesses números, pode-se determinar se $\pi$ é par ou ímpar?

Para responder sim, você deve elaborar e provar uma fórmula para a paridade de uma permutação, com base apenas nos comprimentos de seus ciclos disjuntos.

Para responder não, é preciso achar duas permutações – uma par e uma ímpar – cujos ciclos disjuntos tenham o mesmo comprimento.

**26.20.** O Jogo dos Quinze consiste em um quadro de $4 \times 4$ peças numeradas de 1 a 15, com um espaço vazio. Movem-se as peças nesse tabuleiro deslocando-se uma peça com número para a posição vaga. O diagrama superior mostra a configuração inicial do jogo. Para jogá-lo, você mistura as peças aleatoriamente e procura então restaurar a configuração inicial.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | |

Prove que é impossível mover as peças da posição inicial para uma nova posição em que todos os números estejam em suas posições originais, mas as peças 14 e 15 apareçam trocadas (ver a figura anterior).

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 15 | 14 | |