

- 8.1. Há seis livros em francês diferentes, oito livros em russo diferentes e cinco livros em espanhol diferentes.

a. De quantas maneiras diferentes estes livros podem ser ordenados em uma estante?

b. De quantas maneiras diferentes estes livros podem ser ordenados em uma estante, se os livros de mesma língua devem ficar juntos?

- 8.2. Formule uma discussão do tipo Alice e Bob sobre o que significa somar (e multiplicar) uma lista de números que contém apenas um número.

- 8.3. Consideremos a fórmula

$$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Essa fórmula é quase sempre correta. Para que valores de n e k isso ocorre? Prove que a fórmula é correta sob uma hipótese adequada; isto é, esse problema pede que formulemos e provemos um teorema da forma “Se (condições sobre n e k), então $(n)_k = n! / (n-k)!$ ”.

- 8.4. Calcule $\frac{100!}{98!}$ sem calcular diretamente $100!$ nem $98!$.

- 8.5. Ordene os inteiros seguintes, do menor para o maior: 2^{100} , 100^2 , 100^{100} , $100!$, 10^{10} .

- 8.6. O matemático escocês, James Stirling, encontrou uma fórmula de aproximação para $n!$:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

em que π 3,14159 ... e $e = 2,71828$... (As calculadoras científicas têm uma tecla que calcula e^x ; esta tecla pode ser chamada $\boxed{\exp x}$.)

Calcule $n!$ e a correspondente aproximação de Stirling para $n = 10, 20, 30, 40, 50$. Qual é o erro relativo nas aproximações?

- 8.7. Calcule os produtos seguintes:

a. $\prod_{k=1}^4 (2k + 1)$.

b. $\prod_{k=-3}^4 k$.

c. $\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k}$, em que n é um inteiro positivo.

d. $\prod_{k=1}^n \frac{1}{k}$, em que n é um inteiro positivo.

- 8.8. Quando $100!$ é escrito por extenso, é igual a

$$100! = 9332621 \dots 000000.$$

Sem usar um computador, determine o número de algarismos 0 no final deste número.

- 8.9. Prove que todos os números seguintes são compostos: $1000! + 2$, $1000! + 3$, $1000! + 4$, ..., $1000! + 1002$.

O objetivo desse problema é apresentar uma longa lista de números consecutivos, todos compostos.

- 8.10. O fatorial pode ser estendido aos inteiros negativos? Sobre o fundamento da Equação (3), que valor atribuiria a $(-1)!$?
- 8.11. *Esse problema destina-se apenas aos que estudaram cálculo.* Calcule a integral seguinte para $n = 0, 1, 2, 3, 4$:

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx.$$

Nota: O caso $n = 0$ é o mais fácil. Calcule a integral para valores ordenados de n (primeiro 1, em seguida 2 etc.) e utilize a integração por partes.

Qual é o valor dessa integral para um número natural arbitrário n ?

Extra para os mais avançados: Calcule a integral para $n = \frac{1}{2}$
