Lista 8 de Matemática Discreta I – GAN00170 – 20132

11.1. Para os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7\}$, calcule:

a. $A \cup B$
b. $A \cap B$
c. $A - B$
d. $B - A$
e. $A \,\triangle\, B$
f. $A \times B$
g. $B \times A$

11.2. Prove o Teorema 11.3.

11.3. Anteriormente apresentamos uma ilustração do diagrama de Venn da propriedade distributiva $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Construa uma ilustração do diagrama de Venn da outra propriedade distributiva: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

11.4. A ilustração pelo diagrama de Venn constitui uma prova? (Trata-se de uma questão filosófica.)

11.5. Sejam A, B e C conjuntos, com $A \cap B \cap C = \emptyset$. Prove ou refute: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$.

11.6. Suponha A, B e C conjuntos disjuntos dois a dois. Prove ou refute: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$.

11.7. Para os conjuntos A e B, prove ou refute: $A \cup B = A \cap B$ se e somente se $A = B$.

11.8. Para os conjuntos A e B, prove ou refute: $|A \,\triangle\, B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

11.9. Para os conjuntos A e B, prove ou refute: $|A \,\triangle\, B| = |A - B| + |B - A|$.

11.10. Seja A um conjunto. Prove: $A - \emptyset = A$ e $\emptyset - A = \emptyset$.

11.11. Seja A um conjunto. Prove: $A \,\triangle\, A = \emptyset$ e $A \,\triangle\, \emptyset = A$.

11.12. Prove que $A \subseteq B$ se somente se $A - B = \emptyset$.

11.13. Sejam A e B conjuntos não vazios. Prove que $A \times B = B \times A$ se e somente se $A = B$. Por que é necessária a condição de A e B serem não vazios?

11.14. Formule e prove condições necessárias e suficientes para que $A - B = B - A$. Em outras palavras, estabeleça um teorema da forma "Sejam os conjuntos A e B. Temos $A - B = B - A$ se e somente se (uma condição sobre A e B)". Prove, então, seu resultado.

11.15. Dê uma demonstração padrão da Proposição 11.12 e ilustre-a com um diagrama de Venn.

11.16. *Verdadeiro ou Falso*. Para cada uma das afirmações a seguir, determine se é verdadeira ou falsa e prove sua afirmação. Isto é, para cada afirmação verdadeira, apresente uma prova, e, para cada afirmação falsa, dê um contraexemplo (com explanação).

No que segue, A, B e C denotam conjuntos.

a. $A - (B - C) = (A - B) - C$

b. $(A - B) - C = (A - C) - B$

c. $(A \cup B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

d. Se $A = B - C$, então $B = A \cup C$

e. Se $B = A \cup C$, então $A = B - C$

f. $|A - B| = |A| - |B|$

g. $(A - B) \cup B = A$

h. $(A \cup B) - B = A$

Complemento de um conjunto.

11.17. Seja A um conjunto. O *complemento* de A, denotado por $\overline{A}$, é o conjunto de todos os objetos que não estão em A. ATENÇÃO! Essa definição exige alguns reparos. Tomada literalmente, o complemento do conjunto $\{1, 2, 3\}$ inclui o número -5, o par ordenado $(3, 4)$ e o sol, a lua, as estrelas! Afinal de contas, a definição diz "... *todos os objetos* que não estão em A". Não é isto precisamente o que se tem em vista.

Quando os matemáticos falam de complementos de conjuntos, eles em geral têm em mente um conjunto global, abrangente. Por exemplo, no decorrer de uma prova ou discussão sobre os inteiros, se A é um conjunto que contém apenas números inteiros, $\overline{A}$ corresponde ao conjunto de todos os inteiros que não estão em A.

Se U (de "universo") é o conjunto de todos os objetos em consideração e $A \subseteq U$, então o complemento de A é o conjunto de todos os objetos de U que não estão em A. Em outras palavras, $\overline{A} = U - A$. Assim, $\overline{\emptyset} = U$.

Prove o que segue sobre complementos de conjuntos. Aqui, as letras A, B e C denotam subconjuntos de um conjunto universo U.

a. $A = B$ se e somente se $\overline{A} = \overline{B}$.

b. $\overline{\overline{A}} = A$.

c. $\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.

A notação A é cômoda, mas pode ser ambígua. A menos que fique perfeitamente claro qual deva ser o conjunto "universo" U, é melhor utilizar a notação de diferença de conjuntos do que a notação de complemento.

A notação $U - A$ é muito mais clara do que A.

11.18. Desenhe um diagrama de Venn para quatro conjuntos. Note que o diagrama de Venn de três conjuntos que temos utilizado tem oito regiões (inclusive a região que circunda os quatro círculos), correspondentes aos oito modos possíveis de associação que um objeto pode ter. Um objeto pode estar ou não estar em A, estar ou não em B, e estar ou não estar em C.

Explique por que essa situação origina oito possibilidades.

Seu diagrama de Venn deve mostrar quatro conjuntos, A, B, C e D. Quantas regiões ele terá?

No seu diagrama, sombreie o conjunto $A \triangle B \triangle C \triangle D$.

Nota: Seu diagrama não precisa usar círculos para demarcar os conjuntos. Na verdade, é impossível criar um diagrama de Venn para quatro conjuntos utilizando círculos! O leitor deve utilizar outras formas.

11.19. Sejam os conjuntos A, B e C. Prove que

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| = {} & |A| + |B| + |C| \\ & - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\ & + |A \cap B \cap C|\end{aligned}$$

Uma versão ampliada da inclusão-exclusão.

11.20. Há uma relação íntima entre os conceitos da teoria dos conjuntos e os conceitos da álgebra booleana. Os símbolos $\wedge$ e $\vee$ são versões de $\cup$ e de $\cap$, respectivamente. Isso é mais do que uma coincidência. Consideremos:

$$x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A) \wedge (x \in B)$$
$$x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A) \vee (x \in B)$$

Estabeleça relações análogas entre as noções $\subseteq$ e $\triangle$ da teoria dos conjuntos e noções da álgebra booleana.

11.21. Prove que a diferença simétrica é uma operação comutativa; ou seja, para conjuntos A e B, verifica-se $A \triangle B = B \triangle A$.

11.22. Prove que a diferença simétrica é uma operação associativa; isto é, para quaisquer conjuntos A, B e C, temos $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.

11.23. Ilustre $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$ com um diagrama de Venn.

11.24. Prove a Proposição 11.15.

11.25. Sejam os conjuntos A, B e C. Prove:

a. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

b. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

c. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

d. $A \times (B \triangle C) = (A \times B) \triangle (A \times C)$