

## Lista 9 de Matemática Discreta I – GAN00170 – 20132

1. O indicativo de chamada para uma estação de rádio nos Estados Unidos é uma lista de três ou quatro letras, como WJHU ou WJZ. A primeira letra deve ser W ou K e não há restrições quanto às outras letras. De quantas maneiras o indicativo de chamada de uma estação de rádio pode ser formado?
2. De quantas maneiras podemos fazer uma lista de três números inteiros  $(a, b, c)$  em que  $0 \leq a, b, c \leq 9$  e  $a + b + c$  é par?
3. De quantas maneiras podemos fazer uma lista de três números inteiros  $(a, b, c)$  em que  $0 \leq a, b, c \leq 9$  e  $abc$  é par?
4. Sem o uso de qualquer auxílio computacional, simplifique a seguinte expressão:

$$\frac{20!}{17! \cdot 3!}$$

5. De quantas maneiras podemos organizar um conjunto-padrão de 52 cartas, de forma que todas as cartas em determinado naipe apareçam contiguamente (por exemplo, primeiro aparecem todas as espadas; a seguir, todos os ouros; então, todas as copas; e, em seguida, todos os naipes de paus)?
6. Dez casais estão esperando em uma fila para entrar em um restaurante. Os maridos e as esposas ficam próximos uns dos outros, mas qualquer um deles pode estar à frente do outro. Quantas disposições desse tipo são possíveis?

7. Avalie o seguinte:

$$\prod_{k=0}^{100} \frac{k^2}{k+1}$$

8. Seja  $A = \{x \in \mathbb{Z} : |x| < 10\}$ . Avalie  $|A|$ .
9. Seja  $A = \{1, 2, \{3, 4\}\}$ . Quais das seguintes alternativas são verdadeiras e quais são falsas? Não é necessária nenhuma prova.
  - a.  $1 \in A$
  - b.  $\{1\} \in A$
  - c.  $3 \in A$
  - d.  $\{3\} \in A$
  - e.  $\{3\} \subseteq A$

10. Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos finitos. Determine se os seguintes enunciados são verdadeiros ou falsos. Justifique sua resposta com uma prova e um contraexemplo, conforme apropriado.

- a.  $2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B$
- b.  $2^{A \cup B} = 2^A \cup 2^B$
- c.  $2^{A \Delta B} = 2^A \Delta 2^B$

11. Seja  $A$  um conjunto. Quais das seguintes alternativas são verdadeiras e quais são falsas?

- a.  $x \in A$  sse  $x \in 2^A$
- b.  $T \subseteq A$  sse  $T \in 2^A$
- c.  $x \in A$  sse  $\{x\} \in 2^A$
- d.  $\{x\} \in A$  sse  $\{\{x\}\} \in 2^A$

12. Quais dos seguintes enunciados sobre inteiros são verdadeiros e quais são falsos? Não é necessária nenhuma prova.
- $\forall x, \forall y, x > y$
  - $\exists x, \forall y, x > y$
  - $\forall x, \exists y, x > y$
  - $\exists x, \exists y, x > y$
13. Seja  $p(x, y)$  uma sentença sobre dois inteiros,  $x$  e  $y$ . Por exemplo,  $p(x, y)$  poderia significar “ $x - y$  é um quadrado perfeito”.
- Suponha que o enunciado  $\forall x, \exists y, p(x, y)$  seja verdadeiro. Qual dos seguintes enunciados sobre inteiros também deve ser verdadeiro?
- $\forall x, \exists y, \neg p(x, y)$
  - $\neg(\exists x, \forall y, \neg p(x, y))$
  - $\exists x, \exists y, \neg p(x, y)$ .
14. Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos e suponha que  $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$ . Encontre  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  e  $A - B$ .
15. Que  $A$ ,  $B$  e  $C$  denotem conjuntos. Prove que  $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$  e forneça uma ilustração do diagrama de Venn.
16. Suponha que  $A$  e  $B$  sejam conjuntos finitos. Dado que  $|A| = 10$ ,  $|A \cup B| = 15$  e  $|A \cap B| = 3$ , determine  $|B|$ .
17. Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos. Crie uma expressão que seja estimada para  $A \cap B$  e utilize apenas a união de operações e diferença de conjuntos. Ou seja, encontre a fórmula que utilize apenas os símbolos  $A$ ,  $B$ ,  $\cup$ ,  $-$  e parênteses; essa fórmula deve ser igual a  $A \cap B$  para todos os conjuntos  $A$  e  $B$ .
18. Seja  $n$  um inteiro positivo. Forneça uma prova combinatória da identidade

$$n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n.$$