suas variáveis pelos mesmos valores. Podemos provar a equivalência lógica de expressões booleanas utilizando tabelas-verdade. Concluímos esta seção definindo as operações $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$.

Exercícios

6.1. Faça os seguintes cálculos:

a. Verdadeiro $\wedge$ Verdadeiro $\wedge$ Verdadeiro $\wedge$ Verdadeiro $\wedge$ Falso.

b. $(\neg$Verdadeiro$)$ $\vee$ Verdadeiro.

c. $\neg($Verdadeiro $\vee$ Verdadeiro$)$.

d. (Verdadeiro $\vee$ Verdadeiro) $\wedge$ Falso.

e. Verdadeiro $\vee$ (Verdadeiro $\wedge$ Falso).

Nos quatro últimos exercícios, a ordem em que efetuamos as operações tem importância! Compare as expressões em (b)–(c) e em (d)–(e) e observe que elas são as mesmas exceto no que se refere à colocação dos parênteses.

Repense sua resposta a (a). Essa resposta depende da ordem em que fazemos as operações?

6.2. Com o auxílio de tabelas-verdade, prove tantas partes do Teorema 6.2 quantas puder.

6.3. Prove: $(x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)$ é logicamente equivalente a x.

6.4. Prove: $x \rightarrow y$ é logicamente equivalente a $(\neg y) \rightarrow (\neg x)$.

O Exercício 4 mostra que uma afirmação do tipo "se-então" é logicamente equivalente à sua contrapositiva.

6.5. Prove: $x \leftrightarrow y$ é logicamente equivalente a $(\neg x) \leftrightarrow (\neg y)$.

6.6. Prove: $x \leftrightarrow y$ é logicamente equivalente a $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$.

6.7. Prove: $x \leftrightarrow y$ é logicamente equivalente a $(x \rightarrow y) \wedge ((\neg x) \rightarrow (\neg y))$.

6.8. Prove: $(x \vee y) \rightarrow z$ é logicamente equivalente a $(x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z)$.

6.9. Suponha que tenhamos duas expressões booleanas que envolvam dez variáveis. Para provar que essas duas expressões são logicamente equivalentes, construímos uma tabela-verdade. Quantas linhas (além da linha de cabeçalho) essa tabela teria?

Uma afirmação do tipo "se-então" não é logicamente equivalente à sua inversa.

6.10. Como refutaria uma equivalência lógica? Mostre que:

a. $x \rightarrow y$ não é logicamente equivalente a $y \rightarrow x$.

b. $x \rightarrow y$ não é logicamente equivalente a $x \leftrightarrow y$.

c. $x \vee y$ não é logicamente equivalente a $(x \wedge \neg y) \vee ((\neg x) \wedge y)$.

6.11. *Tautologia* é uma expressão booleana que avalia sempre como Verdadeiro para todos os valores possíveis de suas variáveis. Por exemplo, a expressão $x \vee \neg x$ é Verdadeira tanto quando x = Verdadeiro como quando x = Falso. $x \vee \neg x$ é, pois, uma tautologia.

Explique como utilizar uma tabela-verdade para provar que uma expressão booleana é uma tautologia, e prove que as expressões seguintes são tautologias:

a. $(x \vee y) \vee (x \vee \neg y)$

b. $(x \wedge (x \rightarrow y)) \rightarrow y$

c. $(\neg(\neg x)) \leftrightarrow x$

d. $x \rightarrow x$

e. $((x \to y) \wedge (y \to z)) \to (x \to z)$

f. Falso $\to x$

6.12. Uma *contradição* é uma expressão booleana que avalia como Falso para todos os valores possíveis de suas variáveis. Por exemplo, $x \wedge \neg x$ é uma contradição.

Prove que as expressões seguintes são contradições:

a. $(x \vee y) \wedge (x \vee \neg y) \wedge \neg x$

b. $x \wedge (x \to y) \wedge (\neg y)$

c. $(x \to y) \wedge ((\neg x) \to y) \wedge \neg y$

6.13. Sejam A e B expressões booleanas, isto é, A e B são fórmulas que envolvem variáveis (x, y, z etc.) e operações booleanas ($\wedge$, $\vee$, $\neg$ etc.).

Prove: A é logicamente equivalente a B se e somente se $A \leftrightarrow B$ é uma tautologia.

6.14. As expressões $x \to y$ podem ser reescritas apenas em termos das operações básicas $\wedge$, $\vee$ e $\neg$; isto é, $x \to y = (\neg x) \vee y$.

Ache uma expressão logicamente equivalente a $x \leftrightarrow y$ que utilize apenas as operações básicas $\wedge$, $\vee$ e $\neg$ (e prove que ela é correta).

6.15. Eis outra operação booleana chamada *ou-exclusivo*. Denota-se pelo símbolo $\veebar$ e é definido pela tabela seguinte:

x	y	$x \veebar y$
Verdadeiro	Verdadeiro	Falso
Verdadeiro	Falso	Verdadeiro
Falso	Verdadeiro	Verdadeiro
Falso	Falso	Falso

Faça o seguinte:

a. Prove que $\veebar$ verifica as propriedades comutativa e associativa; isto é, prove as equivalências lógicas $x \veebar y = y \veebar x$ e $(x \veebar y) \veebar z = x \veebar (y \veebar z)$.

b. Prove que $x \veebar y$ é logicamente equivalente a $(x \wedge \neg y) \vee ((\neg x) \wedge y)$. (Assim, $\veebar$ pode expressar-se em termos das operações básicas $\wedge$, $\vee$ e $\neg$.)

c. Prove que $x \veebar y$ é logicamente equivalente a $(x \vee y) \wedge (\neg(x \wedge y))$. (Trata-se de outra maneira de expressar $\veebar$ em termos de $\wedge$, $\vee$ e $\neg$.)

d. Explique por que a operação $\veebar$ é chamada *ou-exclusivo*.

6.16. Discutimos várias operações booleanas binárias: $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$ e (no problema anterior) $\veebar$. Quantas operações booleanas binárias diferentes pode haver? Em outras palavras, de quantas maneiras diferentes podemos completar a tabela seguinte?

x	y	$x * y$
Verdadeiro	Verdadeiro	?
Verdadeiro	Falso	?
Falso	Verdadeiro	?
Falso	Falso	?

Uma operação binária é uma operação que combina dois valores. A operação ¬ não é bi porque atua apenas sobre um valor de cada vez; poderíamos chamá-la *unária*.

Não há muitas possibilidades e, na pior das hipóteses, podemos tentar escrev todas. Organize sua lista, tendo o cuidado para não omitir nenhuma ou, acidentalm relacionar duas vezes a mesma operação.

17. Vimos que as operações $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ e $\veebar$ podem ser reexpressas em termos das oper básicas $\wedge$, $\vee$ e $\neg$. Mostre que todas as operações booleanas binárias (ver prob anterior) podem ser expressas em termos dessas três operações básicas.

18. Prove que $x \vee y$ pode expressar-se em termos de apenas $\wedge$ e $\neg$, de forma que tod operações booleanas binárias possam reduzir-se a apenas duas operações básicas.

A operação booleana *nand*.

19. Eis mais uma operação booleana chamada *nand*, denotada pelo símbolo $\overline{\wedge}$. Defin $x \overline{\wedge} y$ como $\neg(x \wedge y)$.

 Faça o seguinte:

 a. Construa uma tabela verdade para $\overline{\wedge}$.

 b. A operação $\overline{\wedge}$ é comutativa? Associativa?

 c. Mostre como as operações $(x \wedge y)$ e $\neg x$ podem ser reexpressas apenas em termos

 d. Conclua que todas as operações booleanas binárias possam ser expressas apena termos de $\overline{\wedge}$.

utoteste

Não se sabe se cada número perfeito é par; mas presume-se que não existam números perf ímpares.

. Verdadeiro ou falso: Todo inteiro positivo é primo ou composto. Explique sua respos

. Encontre todos os inteiros x para os quais $x \mid (x + 2)$. Não é preciso provar sua respos

. Seja a e b inteiros positivos. Explique por que a notação $a \mid b + 1$ pode ser interpr apenas como $a \mid (b + 1)$ e não como $(a \mid b) + 1$.

. Escreva o seguinte enunciado na forma se-então: "Todo inteiro perfeito é par".

. Qual é o inverso do enunciado: "Se você me ama, então se casará comigo".

. Determine qual dos seguintes enunciados são verdadeiros e quais são falsos. Você basear sua resposta em seu conhecimento comum de matemática; não é necessário pr suas respostas.

 a. Todo inteiro é positivo ou negativo.

 b. Todo inteiro é par e ímpar.

 c. Se x é um inteiro e $x > 2$ e x é primo, então x é ímpar.

 d. Sejam x e y inteiros. Temos $x^2 = y^2$ se e somente se $x = y$.

 e. Os lados de um triângulo são todos congruentes uns com os outros se, e somente se, três ângulos forem todos 60°.

 f. Se um inteiro x satisfaz $x = x + 1$, então $x = 6$.

7. Considere o seguinte enunciado (o qual não se espera que você compreenda):

"Se um matroide for gráfico, então é representável".

Escreva as primeiras e últimas linhas de uma prova direta deste enunciado. É comum utilizar a letra M para representar um matroide.

8. O seguinte enunciado é falso: Se x, y e z são inteiros e $x > y$, então $xz > yz$. Faça o seguinte:

   a. Encontre um contraexemplo.

   b. Modifique a hipótese do enunciado adicionando uma condição relacionada a z, de modo que o enunciado editado seja verdadeiro.

9. Prove ou prove o contrário sobre os seguintes enunciados:

   a. Sejam a, b e c inteiros. Se $a \mid c$ e $b \mid c$, então $(a + b) \mid c$.

   b. Sejam a, b e c inteiros. Se $a \mid b$, então $(ac) \mid (bc)$.

10. Considere a seguinte proposição. Seja N um número de dois dígitos e M o número formado a partir de N ao reverter os dígitos de N. Agora compare N^2 e M^2. Os dígitos de M^2 são precisamente os mesmos de N^2, mas em ordem inversa. Por exemplo:

$$\begin{array}{ll} 10^2 = 100 & 01^2 = 001 \\ 11^2 = 121 & 11^2 = 121 \\ 12^2 = 144 & 21^2 = 441 \\ 13^2 = 169 & 31^2 = 961 \end{array}$$

e assim por diante.

Aqui está uma prova da proposição:

Prova. Como N é um número com dois dígitos, podemos escrever $N = 10a + b$, onde a e b são os dígitos de N. Como M é formado a partir de N ao se reverter os dígitos, $M = 10b + a$.

Observe que $N^2 = (10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2 = (a^2) \times 100 + (2ab) \times 10 + (b^2) \times 1$, de forma que os dígitos de N^2 sejam, na ordem, a^2, $2ab$, b^2.

Do mesmo modo, $M^2 = (10b + a)^2 = (b^2) \times 100 + (2ab) \times 10 + (a^2) \times 1$, de forma que os dígitos de M^2 sejam, na ordem, b^2, $2ab$, a^2, exatamente o reverso de N^2. ■

Sua tarefa: mostre que a proposição é falsa e explique por que a prova é inválida.

11. Suponha que devamos provar a seguinte identidade:

$$x(x + y - 1) - y(x + 1) = x(x - 1) - y$$

A identidade é verdadeira (isto é, a equação é válida para todos os números reais x e y).

A seguinte "prova" é incorreta. Explique por quê.

Prova. Começamos com

$$x(x + y - 1) - y(x + 1) = x(x - 1) - y$$

e expandimos os termos (utilizando a propriedade distributiva)

$$x^2 + xy - x - yx - y = x^2 - x - y$$

Cancelamos os termos x^2, $-x$ e $-y$ dos dois lados para resultar em

$$xy - yx = 0$$

e, por fim, xy e $-yx$ para obter

$$0 = 0$$

o que está correto. ■

12. As expressões booleanas $x \rightarrow \neg y$ e $\neg(x \rightarrow y)$ são logicamente equivalentes? Justifique sua resposta.

13. A expressão booleana $(x \rightarrow y) \vee (x \rightarrow \neg y)$ é uma tautologia? Justifique sua resposta.

14. Prove que a soma de quaisquer três inteiros consecutivos é divisível por três.

15. No problema anterior, você precisou provar que a soma de quaisquer três inteiros consecutivos é divisível por três. No entanto, observe que a soma de quaisquer quatro inteiros consecutivos nunca é divisível por quatro. Por exemplo, $10 + 11 + 12 + 13 = 46$, que não é divisível por quatro.

Para quais inteiros positivos a a soma de a inteiros consecutivos é divisível por a? Isto é, complete a seguinte sentença para fornecer um enunciado verdadeiro:

Seja a um inteiro positivo. A soma de a inteiros consecutivos é divisível por a se e somente se... É necessário que você prove sua conjectura.

16. Seja a um inteiro. Prove: Se $a \geq 3$, então $a^2 > 2a + 1$.

17. Suponha que a seja um quadrado perfeito e $a \geq 9$. Prove que $a - 1$ é composto.

18. Considere a seguinte definição:

Consulte o Exercício 2.6 e sua solução para a definição de *quadrado perfeito*.

Um par de inteiros positivos, x e y, são chamados *amigos quadrados* se sua soma, $x + y$, for um quadrado perfeito. (O conceito de amigos quadrados foi elaborado apenas para este teste, Problemas 18 a 20).

Por exemplo, 4 e 5 são amigos quadrados, porque $4 + 5 = 9 = 3^2$. Do mesmo modo, 8 e 8 são amigos quadrados, pois $8 + 8 = 16 = 4^2$. No entanto, 3 e 8 não são amigos quadrados.

Explique por que 10 e -1 não são amigos quadrados.

19. Seja x um inteiro positivo. Prove que existe um inteiro y maior que x de forma que x e y sejam amigos quadrados.

20. Prove que, se x é um inteiro e $x \geq 5$, então x tem um amigo quadrado y com $y < x$.

Você pode utilizar o seguinte fato em sua prova. Se x é um inteiro positivo, então x fica entre dois quadrados perfeitos consecutivos; ou seja, há um inteiro positivo $a^2 \leq x < (a + 1)^2$.