Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática
P2 de Matemática Discreta - GAN00170 - Turma A1

Nome:____

19/12/2013

Questão 1: (20pts) Prove, por indução, que:

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^j j^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}^*.$$

Questão 2: (21pts)
a) Seja $\pi = (12)(34567)(8\,9\,10\,11) \in S_{12}$. Calcule a paridade de π.
b) Determine o menor inteiro positivo k tal que

$$\pi^{(k)} = \underbrace{\pi\pi\cdots\pi}_{k \text{ vezes}} = id.$$

c) Considere $A = \{1,2,3,4\}$ e a relação $f = \{(1,1),(2,3),(3,4),(1,2)\}$ em A. Responda com justificativa cada uma dos itens: (i) f é uma função? (ii) Calcule a relação f^{-1}; (iii) f^{-1} é uma função?

Questão 3: (20pts) Dada a recorrência $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ com $a_0 = a_1 = 1$. Ache a fórmula para a_n.

Questão 4: (18pts) Ache o número mínimo n de inteiros a serem selecionados de $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ tal que: (a) a soma de dois dos n selecionados seja um número par; (b) a diferença de dois dos n seja 5. Em cada um dos casos justifique.

Questão 5: (21pts) Dizemos que um número natural n é um *quadrado perfeito* se existe outro número natural a tal que $n = a^2$. Considere s_n a soma dos quadrados perfeitos, isto é,

$$0, 1, 5, 14, 30, 55, 91, \ldots$$

Encontre uma fórmula para s_n.

Boa Prova!