Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática
*P2 de Matemática Discreta - GAN00170 - Turma A1,B1*

# Gabarito

19/12/2013

As questões mudam de uma prova pra outra. Mas todas as questões aparecem no gabarito.

---

**Questão 1:** (20pts) Prove, por indução, que:

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^j j^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}^*.$$

**Solução:** Vamos provar por indução. Para $n = 1$ temos que: $\sum_{j=1}^{1}(-1)^j j^2 = -1 = (-1)^1 \frac{1(1+1)}{2}$. Portanto, o resultado é válido nesse caso. Suponha como hipótese de indução que o resultado é verdadeiro para $n = k$. Vamos provar que vale para $n = k+1$. Somando $\sum_{j=1}^{k}(-1)^j j^2$ com $(-1)^{k+1}(k+1)^2$ temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k}(-1)^j j^2 + (-1)^{k+1}(k+1)^2 &= (-1)^k \frac{k(k+1)}{2} + (-1)^{k+1}(k+1)^2 \text{ usando a hipótese de indução} \\
&= (-1)^k \left[\frac{k^2+k}{2} + (-1)(k^2+2k+1)\right] \\
&= (-1^k)\frac{k^2+k-2k^2-4k-2}{2} \\
&= (-1)^k(-1)\frac{k^2+3k+2}{2} \\
&= (-1)^{k+1}\frac{(k+1)(k+2)}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto, pela princípio de indução o resultado é verdadeiro para todo $n \geq 1$ natural.

**Questão 1:** (20pts) Prove, por indução, que:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}^*.$$

**Solução:** Vamos provar por indução. Para $n = 1$ temos que:

$$\sum_{j=1}^{1}\frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}.$$

Portanto, o resultado é válido nesse caso. Suponha como hipótese de indução que o resultado é verdadeiro para $n = k$. Vamos provar que vale para $n = k + 1$. Somando $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)}$ com $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \text{ usando a hipótese de indução} \\
&= \frac{k(k+2)}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+2}.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio de indução o resultado é verdadeiro para todo $n \geq 1$ natural.

---

**Questão 2:** (21pts)
a) Seja $\pi = (12)(34567)(8\,9\,10\,11) \in S_{12}$. Calcule a paridade de $\pi$.
b) Determine o menor inteiro positivo $k$ tal que

$$\pi^{(k)} = \underbrace{\pi\pi\cdots\pi}_{k \text{ vezes}} = id.$$

c) Considere $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e a relação $f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 4), (1, 2)\}$ em $A$. Responda com justificativa cada uma dos itens: (i) $f$ é uma função? (ii) Calcule a relação $f^{-1}$; (iii) $f^{-1}$ é uma função?
**Solução:** a) Como $\pi$ esta escrito em ciclos disjuntos temos

$$\pi = (12)\,[(3\,7)(3\,6)(3\,5)(3\,4)]\,[(8\,11)(8\,10)(8\,9)]\,.$$

Portanto, $\pi$ é par.
b) Primeiro observe que se dois ciclos disjuntos são disjuntos eles comutam. Em segundo lugar observe que um ciclo de ordem $j$ se anula pela primeira vez quando o ciclo é multiplicado $j$ vezes. com isso em mente temos

$$\pi^{(k)} = [(12)]^k\,[(34567)]^k\,[(8\,9\,10\,11)]^k\,.$$

Portanto, $\pi^{(k)} = id$ quando $k|2$, $k|5$ e $k|4$, o menor valor que isso acontece é o menor divisor comum de $2, 5$ e $4$ que é 20.
c) (i)$f$ não é uma função por dois motivos: o primeiro é que 1 vai no 1 e no 2 e o segundo motivo é que 4 não vai em nenhum valor, apesar de 4 estar no domínio de $f$. (ii) $f^{-1} = \{(1, 1), (3, 2), (4, 3), (2, 1)\}$ e (iii) sim, $f^{-1}$ é uma função pois $f^{-1}$ é avaliado em todos os valores de $A$ e para cada valor de $A$ ele vai em um único valor.

---

**Questão 3:** (20pts) Dada a recorrência $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ com $a_0 = a_1 = 1$. Ache a fórmula para $a_n$.
**Solução:** O polinômio característico é $p(x) = x^2 - 2x - 1$ e suas raízes são: $1 + \sqrt{2}$ e $1 - \sqrt{2}$, logo

$$a_n = c_1(1 + \sqrt{2})^n + c_2(1 - \sqrt{2})^n.$$

Calculando em para $n = 0, 1$ temos

$$\left.\begin{array}{lcl} c_1 + c_2 & = & 1 \\ c_1(1+\sqrt{2}) + c_2(1-\sqrt{2}) & = & 1 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = c_2 = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a solução é

$$a_n = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^n + \frac{1}{2}(1-\sqrt{2})^n.$$

---

**Questão 4:** (18pts) Ache o número mínimo $n$ de inteiros a serem selecionados de $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ tal que: (a) a soma de dois dos $n$ selecionados seja um número par; (b) a diferença de dois dos $n$ seja 5. Em cada um dos casos justifique.
**Solução:** (a) Para que a soma de dois números seja par, ambos devem ser pares ou ambos devem ser ímpares. Além disso os $S$ pode ser dividido em par e ímpar. Portanto, $n = 3$. Pois, em qualquer caso teremos ou dois ímpares ou dois pares no subconjunto selecionado.
(b) Observe que para a diferença de dois números ser 5 temos que ter escolhido um dos pares: $(6, 1), (7, 2), (8, 3), (9, 4), (5)$. Portanto, $n = 6$ é o suficiente, para garantir que para qualquer subconjunto escolhido vai haver pelo menos um dos pares acima.

---

**Questão 5:** (21pts) Dizemos que um número natural $n$ é um *quadrado perfeito* se existe outro número natural $a$ tal que $n = a^2$. Considere $s_n$ a soma dos quadrados perfeitos, isto é,

$$0, 1, 5, 14, 30, 55, 91, \ldots$$

Encontre uma fórmula para $s_n$.
**Solução:** Utilizando o operador diferença temos

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & & 1 & & 5 & & 14 & & 30 & & 55 & & 91 \\
& 1 & & 4 & & 9 & & 16 & & 25 & & 64 & \\
& & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & & 11 & & \\
& & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & &
\end{array}$$

Portanto, $s_n$ tem expressão polinomial e é dado por

$$s_n = 0\binom{n}{0} + 1\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + 2\binom{n}{4} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

---