Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática
VR de Matemática Discreta - GAN00170 - Turma A1,B1

Gabarito

09/01/2014

Questão 1: (20pts) Prove, por indução, que:

$$7 \text{ divide } 2^{n+2} + 3^{2n+1}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Solução: Vamos provar por indução. Iniciamos verificando se o resultado é verdadeiro

pra $n = 0$. Observe
$$2^{0+2} + 3^{2\times 0+1} = 2^2 + 3^1 = 7,$$
portanto, é divisivel por 7. Suponha que o resultado é verdadeiro para $n = k$. Isto quer dizer que existe um $r \in \mathbb{Z}$ tal que

$$2^{k+2} + 3^{2k+1} = 7r,$$

daí

$$\begin{aligned}
2^{(k+1)+2} + 3^{2(k+1)+1} &= 2 \times 2^{k+2} + 3^2 \times 3^{2k+1} \\
&= 2 \times 2^{k+2} + 3^2 \times 3^{2k+1} \\
&= 2 \times 2^{k+2} + (2+7) \times 3^{2k+1} \\
&= 2 \times 2^{k+2} + 2 \times 3^{2k+1} + 7 \times 3^{2k+1} \\
&= 2\left[2^{k+2} + 3^{2k+1}\right] + 7 \times 3^{2k+1} = 2(7r) + 7 \times 3^{2k+1} = 7(2r + 3^{2k+1}).
\end{aligned}$$

Portanto, 7 divide $2^{(k+1)+2} + 3^{2(k+1)+1}$ e pelo princípio da indução o resultado é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$.

Questão 2: (21pts)
a) Seja $\pi = (12)(324)(567)(678)(79) \in S_9$. Calcule a paridade de π.
b) Determine o menor inteiro positivo k tal que

$$\pi^{(k)} = \underbrace{\pi\pi\cdots\pi}_{k \text{ vezes}} = id.$$

Solução: a) Inicialmente precisamos escrever π como produto de ciclos disjuntos. Operando obtemos
$$\pi = (1243)(567)(678)(79) = (1243)(56)(798).$$

Escrevendo π como produto de transposições obtemos

$$\pi = (13)(14)(12)(56)(78)(79).$$

Portanto, π é par.

b) Com a expressão de π em produto de ciclos disjuntos, e levando em conta que ciclos disjuntos comutam temos

$$\pi^{(k)} = (1243)^{(k)}(56)^{(k)}(798)^{(k)}$$

Para tornar o ciclo $(1243)^{(k)}$ a identidade k precisa ser um multiplo de 4, para tornar $(56)^{(k)}$ a identidade k precisa ser um multiplo de 2 e, finalmente, para tornar $(798)^{(k)}$ a identidade k precisa ser um multiplo de 3. O menor valor que faz isso é $k = 12$.

Questão 3: (18pts) Responda justificando os itens abaixo:
a) Quantos anagramas diferentes podemos fazer da palavra: macaparaense
b) Dizemos que uma lista de comprimento n formada de $\{1, 2, \ldots, n\}$ é uma desordenação se o número j não ocupa a posição j da lista qualquer $j = 1, 2, \ldots, n$. Quantas desordenações existem se $n = 5$?

Solução: a) Basta considerarmos as classes de equivalências da palavra. Como temos 4 letras "'a"' e 2 "'e"'. Segue que o número de anagramas diferentes é

$$\frac{12!}{4!2!} = 9979200.$$

b) Quando propus a questão me esqueci de avisar que não deveria haver repetição nas listas. Portanto, admitirei soluções que foram feitas com repetição, mas só vou postar a solução com listas que não admitem repetição.

Sabemos que temos 5! listas, sem repetição. Vamos calcular todas as listas que não são desordenações e subtrair desse valor.

Para calcular o número de listas que não são desordenações considere os seguintes conjuntos:

$$B_i = \{\text{ listas cuja a entrada } i \text{ é } i\}.$$

Precisamos determinar a cardinalidade de $|B_1 \cup B_2 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5|$. Usando o princípio da inclusão exclusão temos:

$$\begin{aligned}
|B_1 \cup B_2 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5| &= \binom{5}{1}|B_1| - \binom{5}{2}|B_1 \cap B_2| + \binom{5}{3}|B_1 \cap B_2 \cap B_3| \\
&- \binom{5}{4}|B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4| + \binom{5}{5}|B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5| \\
&= 5 \times 4! - 10 \times 3! + 10 \times 2! - 5 \times 1! + 1 \\
&= 76
\end{aligned}$$

Logo o número de desordenações é $5! - 101 = 120 - 76 = 44$.

Questão 4: (20pts) Dada a recorrência $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ com $a_0 = 1$ e $a_1 = 4$. Ache a fórmula para a_n expressa como combinação linear de potências de números.
Solução: O polinômio característico é $p(x) = x^2 - 5x + 6$ e suas raízes são: 2 e 3, logo

$$a_n = c_1(2)^n + c_2(3)^n.$$

Calculando em para $n = 0, 1$ temos

$$\left.\begin{array}{lcl} c_1 + c_2 & = & 1 \\ 2c_1 + 3c_2 & = & 4 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = -1 \text{ e } c_2 = 2.$$

Portanto, a solução é

$$a_n = -2^n + 2 \times 3^n.$$

Questão 5: (21pts) Verifique se a sequência é gerada por uma expressão polinomial. Se o for, encontre a expressão polinomial que fornece a_n

$$4, 4, 10, 28, 64, 124, 214, 340, 508, 724, \ldots$$

Solução: Utilizando o operador diferença temos

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
4 & & 4 & & 10 & & 28 & & 64 & & 124 & & 214 & & 340 & & 508 & & 724 \\
& 0 & & 6 & & 18 & & 36 & & 60 & & 90 & & 126 & & 168 & & 216 & \\
& & 6 & & 12 & & 18 & & 24 & & 30 & & 36 & & 42 & & 48 & & \\
& & & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & & & \\
& & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Portanto, a_n tem expressão polinomial e é dado por

$$a_n = 4\binom{n}{0} + 0\binom{n}{1} + 6\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3} = n^3 - n + 4.$$

Questão extra: Em uma festa com N pessoas, então pelo menos duas pessoas tem a mesma quantidade amigos presente na festa.

Solução: Uma pessoa pode ter de 0 até $N - 1$ amigos na festa. No entanto, se alguém tem 0 amigos na festa, então ninguém na festa pode ter $N - 1$ amigos, e se alguém tem $N - 1$ amigos na festa, então ninguém pode ter 0 amigos na festa. Daí, o número de possibilidades para o número de amigos é exatamente $N - 1$ amigos, mas na festa temos N pessoas. Portanto duas pessoas na festa precisam ter o mesmo número de amigos.
