Lista 19

19 Exercícios

19.1. Formule a contrapositiva de cada uma das seguintes afirmações:

a. Se x é ímpar, então x^2 é ímpar.

b. Se p é primo, então $2^p - 2$ é divisível por p.

c. Se x é diferente de zero, então x^2 é positivo.

d. Se as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares, então o paralelogramo é um losango.

e. Se a bateria está carregada, o carro dará a partida.

f. Se A ou B, então C.

19.2. Qual é a contrapositiva da contrapositiva de uma afirmação do tipo "se-então"?

19.3. Uma afirmação da forma "A se e somente se B" costuma ser provada em duas partes: em uma delas mostramos que $A \Rightarrow B$ e, na outra, que $B \Rightarrow A$.

Explique por que também é aceitável a seguinte estrutura para uma prova. Primeiro, provamos que $A \Rightarrow B$ e, em seguida, provamos que $\neg A \Rightarrow \neg B$.

19.4. Para cada uma das afirmações seguintes, escreva as primeiras sentenças de uma prova por contradição (você não deve tentar completar as provas). Utilize a frase "por contradição".

a. Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.

b. A soma de dois inteiros negativos é um inteiro negativo.

c. Se o quadrado de um número racional é um inteiro, então o número racional deve ser também um inteiro.

d. Se a soma de dois primos é um primo, então um dos primos deve ser 2.

e. Uma reta não pode interceptar os três lados de um triângulo.

f. Círculos distintos interceptam-se no máximo em dois pontos.

g. Há um número infinito de números primos.

19.5. Prove, por contradição, que inteiros consecutivos não podem ser ambos pares.

19.6. Prove, por contradição, que inteiros consecutivos não podem ser ambos ímpares.

19.7. Prove, por contradição: se a soma de dois primos é um número primo, então um dos primos deve ser 2.

Você pode supor que todo inteiro seja ou par ou ímpar, mas nunca ambos.

19.8. Sejam os conjuntos A e B. Prove, por contradição, que $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$.

19.9. Sejam os conjuntos A e B. Prove que $A \cap B = \emptyset$ se e somente se $(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset$.

19.10. Prove a recíproca do princípio da adição (Corolário 11.8). A *recíproca* de uma afirmação "Se A, então B" é a afirmação "Se B, então A". Em outras palavras, você deve provar o seguinte:

Sejam A e B conjuntos finitos. Se $|A \cup B| = |A| + |B|$, então $A \cap B = \emptyset$.

19.11. Seja A um subconjunto dos inteiros.

a. Formule uma definição cuidadosa de *elemento mínimo* de A.

b. Seja E o conjunto dos inteiros pares, isto é, $E = \{x \in \mathbb{Z} : 2|x\}$. Prove, por contradição, que E não tem elemento mínimo.

c. Prove que, se $A \subseteq \mathbb{Z}$ tem um elemento mínimo, então esse elemento é único.