Lista 20

20.3. Prove, pelas técnicas desta seção, que $n < 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

20.4. Prove, pelas técnicas desta seção, que $n! \leq n^n$ para todos os inteiros positivos n.

20.5. A desigualdade $F_n > 1{,}6^n$ é verdadeira para n suficientemente grande. Mediante alguns cálculos, determine para quais valores de n essa desigualdade é válida. Prove sua asserção.

20.6. Calcule a soma dos n primeiros números de Fibonacci para $n = 0, 1, 2, \ldots, 5$. Em outras palavras, calcule

$$F_0 + F_1 + \ldots + F_n$$

para diversos valores de n.

Formule uma conjetura sobre essas somas e prove-a.

20.7. Critique a afirmação e a prova a seguir:

Afirmação. Todos os números naturais são divisíveis por 3.

Prova. Suponhamos, por contradição, que a afirmação fosse falsa. Seja X o conjunto de contraexemplos (isto é, $X = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ não é divisível por } 3\}$). A suposição de que a afirmação seja falsa significa que $X \neq \emptyset$. Como X é um conjunto não vazio de números naturais, contém um elemento mínimo x.

Note que $0 \notin X$, porque 0 é divisível por 3. Logo, $x \neq 3$.

Consideremos agora $x - 3$. Como $x - 3 < x$, não é um contraexemplo da afirmação. Portanto, $x - 3$ é divisível por 3; isto é, existe um inteiro a de modo que $x - 3 = 3a$. Assim, $x = 3a + 3 = 3(a + 1)$ e x é divisível por 3, contradizendo $x \in X$. $\Rightarrow\Leftarrow$ ∎

20.8. Na Seção 16, mostramos que o triângulo de Pascal e o triângulo dos coeficientes binomiais são idênticos e explicamos por quê. Reformule aquela discussão como uma prova cuidadosa utilizando o método do contraexemplo mínimo. Sua prova deve conter uma sentença análoga a "Consideremos a primeira linha onde o triângulo de Pascal e o triângulo dos coeficientes binomiais não são os mesmos".

20.9. Prove o princípio generalizado da adição utilizando o método da boa ordenação. Ou seja, prove o seguinte:

Suponha que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sejam conjuntos finitos disjuntos dois a dois. Então:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$