Lista 22

22.1. Para cada uma das seguintes relações de recorrência, calcule os primeiros seis termos da sequência (ou seja, de a_0 a a_5). Não é necessário encontrar a fórmula para a_n.

a. $a_n = 2a_{n-1} + 2$, $a_0 = 1$
b. $a_n = a_{n-1} + 3$, $a_0 = 5$
c. $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$
d. $a_n = 3a_{n-1} + 5a_{n-2}$, $a_0 = 0$, $a_1 = 0$
e. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$, $a_0 = a_1 = 1$
f. $a_n = a_{n-1} + n$, $a_0 = 1$

22.2. Resolva cada uma das seguintes relações de recorrência fornecendo uma fórmula explícita para a_n. Para cada uma, calcule a_9.

a. $a_n = \frac{2}{3}a_{n-1}$, $a_0 = 4$
b. $a_n = 10a_{n-1}$, $a_0 = 3$
c. $a_n = -a_{n-1}$, $a_0 = 5$
d. $a_n = 1{,}2a_{n-1}$, $a_0 = 0$
e. $a_n = 3a_{n-1} - 1$, $a_0 = 10$
f. $a_n = 4 - 2a_{n-1}$, $a_0 = 0$
g. $a_n = a_{n-1} + 3$, $a_0 = 0$
h. $a_n = 2a_{n-1} + 2$, $a_0 = 0$
i. $a_n = 8a_{n-1} - 15a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 4$
j. $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$, $a_0 = 4$, $a_1 = 4$
k. $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$
l. $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, $a_0 = 3$, $a_1 = 6$
m. $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $a_0 = 5$, $a_1 = 1$
n. $a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2}$, $a_0 = 5$, $a_1 = 1$
o. $a_n = 2a_{n-1} + 2a_n$, $a_0 = 3$, $a_1 = 3$
p. $a_n = 2a_{n-1} - 5a_{n-2}$, $a_0 = 2$, $a_1 = 3$

22.3. Cada uma das seguintes sentenças é gerada por uma expressão polinomial. Para cada uma delas, encontre a expressão polinomial que fornece a_n.

a. 1, 6, 17, 34, 57, 86, 121, 162, 209, 262,...
b. 6, 5, 6, 9, 14, 21, 30, 41, 54, 69, ...
c. 4, 4, 10, 28, 64, 124, 214, 340, 508, 724,...
d. 5, 16, 41, 116, 301, 680, 1361, 2476, 4181, 6656,...

22.4. Explique por que a notação Δa_n tem parênteses implicitamente $(\Delta a)_n$ e por que $\Delta(a_n)$ está incorreto.

22.5. Seja k um inteiro positivo e seja $a_n = \binom{n}{k}$. Prove que $a_0 = \Delta a_0 = \Delta^2 a_0 = \ldots = \Delta^{k-1} a_0 = 0$ e que $\Delta^k a_0 = 1$

22.6. Suponhamos que a sequência a satisfaça a recorrência $a_n = a_{n-1} + 12a_{n-2}$ e que $a_0 = 6$ e $a_5 = 4877$. Encontre uma expressão para a_n.

22.7. Encontre uma fórmula polinomial para $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4$

22.8. Seja t um inteiro positivo. Prove que $1^t + 2^t + 3^t + \ldots + n^t$ pode ser escrito como uma expressão polinomial

22.9. Alguns dos chamados testes de inteligência frequentemente incluem problemas em que uma série de números é apresentada e o indivíduo é solicitado a encontrar o próximo termo da sequência. Por exemplo, a sequência poderia começar com 1, 2, 4, 8. Não restam dúvidas de que o examinador está esperando por 16 como o próximo termo.

Demonstre como "superar" o teste de inteligência encontrando uma expressão polinomial (de 3º grau) para a_n, de forma que $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$, mas $a_4 = 15$.

22.10. Seja s um número real com $s \neq 0$. Encontre uma sequência a, de modo que $a_n = s\Delta a_n$ e $a_0 = 1$.

22.11. Resolva a equação $\Delta^2 a_n = -a_n$, com $a_0 = a_1 = 2$

22.12. Encontre duas sequências diferentes a e b para as quais $\Delta a_n = \Delta b_n$ para todos os n.

22.13. As relações de recorrência de segunda ordem que resolvemos são da forma $a_n = s_1 a_{n-1} + s_2 a_{n-2}$. Nesse problema, estendemos isso para relações da forma $a_n = s_1 a_{n-1} + s_2 a_{n-2} + t$. Tipicamente (mas não sempre), a solução para esse tipo de relação é da forma $a_n = c_1 r^n_1 + c_2 r^n_2 + c_3$, em que c_1, c_2, c_3 são números específicos e r_1, r_2 são raízes da equação quadrática associada $x^2 - s_1 x - s_2 = 0$. Entretanto, se uma dessas raízes for 1, ou se as raízes forem iguais umas às outras, é necessária outra forma de solução.

Resolva as seguintes relações de recorrência. Nos casos em que a forma-padrão não se aplica, tente desenvolver uma forma alternativa apropriada, mas, caso não encontre a solução, consulte as Dicas (Apêndice A).

a. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$

b. $a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2} + 4$, $a_0 = 2$, $a_1 = 3$

c. $a_n = 2a_{n-1} + 4a_{n-2} + 6$, $a_0 = a_1 = 4$

d. $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 5$, $a_0 = a_1 = 3$

e. $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 2$, $a_0 = -1$, $a_1 = 4$

f. $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2$, $a_0 = 4$, $a_1 = 2$

22.14. Faça uma inferência a partir dos Teoremas 22.5 e 22.9 para solucionar as relações de recorrência de terceiro grau a seguir:

a. $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2} - 6a_{n-3} + a_0 = 8$, $a_1 = 3$ e $a_2 = 27$

b. $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} - 4a_{n-3} + a_0 = 11$, $a_1 = 10$ e $a_2 = 32$

c. $a_n = -a_{n-1} + 8a_{n-2} + 12a_{n-3} + a_0 = 6$, $a_1 = 19$ e $a_2 = 25$

d. $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3} + a_0 = 3$, $a_1 = 2$ e $a_2 = 36$

22.15. Suponhamos que você deseje gerar elementos de uma relação de recorrência utilizando um programa de computação. É tentador elaborar um programa desses de maneira recorrente.

Por exemplo, considere a recorrência $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 5$. Eis um programa para calcular os valores a_n:

```
procedure get_term(n)
   if (n < 0)
        print 'Illegal argument'
        exit
   end

   if (n == 0)
        return 1
   end

   if (n == 1)
        return 5
   end
   return 3*get_term (n-1) - 2*get_term(n-2)
end
```

Embora esse programa seja de fácil compreensão, é extremamente ineficiente. Explique o por quê.

Em particular, seja b_n o número de vezes que essa rotina é chamada ao calcular a_n. Encontre uma recorrência – e solucione-a! para b_n.

22.16. Há muitos tipos de relações de recorrência que são de formas diferentes das apresentadas nesta seção. Experimente encontrar uma fórmula para a_n para as expressões a seguir:

a. $a_n = na_{n-1}$, $a_0 = 1$

b. $a_n = a^2_{n-1}$, $a_0 = 2$

c. $a_n = a_0 + a_1 + a_2 ... + a_{n-1}$, $a_0 = 1$

d. $a_n = na_0 + (n-1)a_1 + (n-2)a_2 + ... + 2a_{n-2} + 1a_{n-1}$, $a_0 = 1$

e. $a_n = 3.9a_{n-1}(1 - a_{n-1})$, $a_0 = \frac{1}{2}$

Autoteste

1. Prove que a equação $x^2 + 1 = 0$ não tem nenhuma solução real.
2. Prove que a soma de quaisquer inteiros consecutivos não é divisível por 4.
3. Sejam a e b inteiros positivos. Prove: Se $a|b$ e $b|a$, então $a = b$.

4. Quais dos seguintes conjuntos são bem ordenados?
   a. O conjunto de todos os inteiros pares.
   b. O conjunto de todos os números primos.
   c. $\{-100, -99, -98, ..., 98. 99, 100\}$
   d. $\varnothing$
   e. Os inteiros negativos.
   f. $\{\pi, \pi^2, \pi^3, \pi^4, ...\}$ em que π é o número real familiar 3,14159....
5. Seja n o inteiro positivo. Prove que

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{3n^2 - n}{2}.$$

6. Seja n um número natural. Prove que

$$0! + 1! + 2! + ... + n! \leq (n + 1)!$$

7. Suponhamos que $a_0 = 1$ e $a_n = 4a_{n-1} - 1$, quando $n \geq 1$. Prove que, para todos os números naturais n, temos $a_n = (2 . 4^n + 1)/3$.
8. Prove por indução: Se $n \in \mathbb{N}$, então $n < 2^n$.
9. Considere a seguinte proposição.
   Seja P um conjunto finito de (três ou mais) pontos no plano e suponhamos que quaisquer três pontos em P sejam colineares. Então, todos os três pontos em P devem estar em uma linha comum.
   Prove isso de duas maneiras: por contradição e por indução.
10. Seja n um inteiro positivo. Prove que

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} \leq n\sqrt{n}.$$

11. Prove o teorema binomial (Teorema 16.8) por indução. Ou seja, se n é um número natural, então

$$(x + y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j}.$$

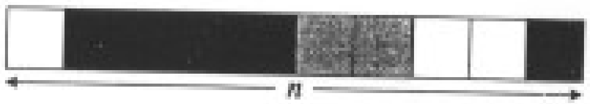
12. Seja n um inteiro positivo e suponhamos que n linhas distintas sejam desenhadas em um plano. Não existem duas dessas linhas que sejam paralelas, e não existem três dessas linhas que se interceptem em um ponto comum. Prove que essas linhas dividem o plano nas regiões $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$.
13. Que F_n denote o n-ésimo número de Fibonacci (ver a Definição 20.12). Prove que para todos os números naturais n, temos

$$F_n + 2F_{n+1} = F_{n+4} - F_{n+2}$$

14. Que F_n denote o n-ésimo número de Fibonacci. Se n é um número natural, então 1 é o único divisor positivo de F_n e F_{n+1} (por exemplo, se $d > 0$, $d|F_n$ e $d|F_{n+1}$, então $d = 1$.

15. Uma faixa horizontal será coberta de ladrilhos. Os ladrilhos são de dois formatos: retângulos de 1×1 e retângulos de 1×2! Os ladrilhos de 1×1 estão disponíveis em duas cores

(branco e cinza), e os ladrilhos de 1×2 estão disponíveis em três cores (branco, cinza claro e cinza). Para um inteiro positivo n, que a_n denote o número de formas diferentes de cobrir uma faixa de comprimento n utilizando esses de ladrilhos. A figura mostra uma possível cobertura com ladrilhos, com $n = 11$.



a. Demonstre que, para $n \geq 2$, $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$

b. Prove que $a_n = (3^{n+1} + (-1)^n)/4$

16. Seja n um inteiro positivo. Prove que há um único par de inteiros não negativos a, b, de forma que $n = 2^a b$ e b seja ímpar.

17. Seja A um conjunto finito não vazio de inteiros positivos. Suponhamos que, para quaisquer dois elementos r, $s \in A$, temos $r|s$ ou $s|r$. (em símbolos, $\forall r \in A$, $\forall s \in A$, $(r|s$ ou $s|r)$).

   a. Prove que A contém um elemento t com a propriedade que, para todos os $a \in A$, $a|t$. (Em símbolos, $\exists t \in A$, $\forall a \in A$, $a|t$)

   b. Além disso, prove que t é exclusivo (por exemplo, há apenas um elemento de A que é múltiplo de todos os elementos de A).

   c. Por fim, dê um exemplo para demonstrar que a exclusividade não é válida se não presumirmos que todos os elementos de A sejam positivos.

18. Encontre uma fórmula para o n-ésimo termo, a_n, para cada uma das seguintes relações de recorrência.

   a. $a_n = 2a_{n-1} + 15a_{n-2}$, $a_0 = 4$, $a_1 = 0$

   b. $a_n = 2a_{n-1} + 15$, $a_0 = 4$, $a_1 = 0$

   c. $a_n = 12a_{n-1} + 36a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$

19. A seguinte sequência de números é gerada pela expressão polinomial. Encontre o polinômio (o primeiro termo é a_0; é preciso encontrar uma expressão polinomial para a_n).

   A sequência é

$$5, 26, 67, 146, 281, 490, 791, 1202, 1741, 2426, 3275, \ldots$$