Matemática Discreta I - Solução de exercícios

Prof. Jones Colombo

04/11/2013

Solução dos exercícios 17.8 e 17.9

17.8 Sejam n, k inteiros positivos. Prove

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n-1}{0}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n-1}{1}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n-1}{2}\!\!\right) + \cdots + \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right)$$

Solução: Inicialmente lembramos da fórmula que relaciona a expressão de multiescolha com a escolha: $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$ e recordando a expressão

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k}$$

Daí temos

$$\begin{aligned}
\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) &= \binom{n+k-1}{k} + \binom{n+k-1}{k-1} \\
&= \binom{n+k-1}{k} + \binom{n+k-2}{k-1} + \binom{n+k-2}{k-2} \\
&\vdots \\
&= \binom{n+k-1}{k} + \binom{n+k-2}{k-1} + \cdots + \binom{n-3}{1} + \binom{n-2}{0} \\
&= \binom{n-2}{0} + \binom{n-3}{1} + \cdots + \binom{n+k-2}{k-1} + \binom{n+k-1}{k} \\
&= \left(\!\!\binom{n-1}{0}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n-1}{1}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n-1}{2}\!\!\right) + \cdots + \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right).
\end{aligned}$$

17.9 Sejam n, k inteiros positivos. Prove

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{1}{k-1}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{2}{k-1}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{3}{k-1}\!\!\right) + \cdots + \left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right)$$

Solução: Já esse exercício é muito semelhante ao anterior. Aqui novamente vamos usar a relação:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k}.$$

Da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) &= \binom{n+k-1}{k} \\
&= \binom{n+k-2}{k-1} + \binom{n+k-2}{k} \\
&= \binom{n+k-2}{k-1} + \binom{n+k-3}{k-1} + \binom{n+k-3}{k-2} \\
&\vdots \\
&= \binom{n+k-2}{k-1} + \binom{n+k-3}{k-1} + \cdots + \binom{k-2}{k-1} + \binom{k-1}{k-1} \\
&= \binom{k-2}{k-1} + \binom{k-3}{k-1} + \cdots + \binom{n+k-3}{k-1} + \binom{n+k-2}{k-1} \\
&= \left(\!\!\binom{1}{k-1}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{2}{k-1}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{3}{k-1}\!\!\right) + \cdots + \left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right)
\end{aligned}$$
