

Nome:

6/7/2015

Questão 1: (2,5pts) a) Mostre que o polinômio $f(x) = x^5 - 4x + 2$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}[x]$.

b) Prove o resultado: Seja $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Se existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $g(x + c)$ é irredutível em $\mathbb{Z}[x]$, então g é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$. Use o resultado para provar que $f(x) = x^4 + 1$ é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$.

Questão 2: (2,5pts) a) Dado a permutação $\sigma = (12)(34)$ e $\theta = (56)(13)$ encontre uma permutação a tal que $a^{-1}\sigma a = \theta$.

b) Prove que não existe uma permutação a tal que $a^{-1}(123)a = (13)(578)$.

c) Determine se as permutações são pares ou ímpares: $(12345)(123)(45)$ e $(12)(13)(124)(25)$.

Questão 3: (1,5pts) Mostre que se H é um subgrupo de índice 2 em um grupo G , então H é normal em G .

Questão 4: (2,0pts) Calcule α e $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ tal que

$$\text{MDC}(w, z) = \alpha w + \beta z,$$

onde $w = 9 + 10i$ e $z = 2 + 3i$.

Questão 5: (1,5pts) Se d é um inteiro positivo, então o d -ésimo polinômio Ciclotômico é definido por

$$\phi_d(x) = \prod (x - \xi),$$

onde ξ corre sobre todas as d -ésimas raízes primitivas da unidade. Calcule $\phi_d(x)$ para $1 \leq d \leq 9$.

Boa Prova!