Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática
Gabarito da VR de Álgebra Linear - GAN00140

21/03/2016

1. [12*pts*] Ache uma base para o subespaço vetorial

$$U = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y - z + t = 0\right\}.$$

Solução: Resolvendo o sistema $x - y - z + t = 0$ que consiste em uma única equação em 4 variáveis obtemos $x = y + z - t$. Daí a solução geral é dado por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y + z - t \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$U = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Claramente este vetores são LI. Portanto esta é a base que procuramos.

---

2. [24*pts*] Em cada item determine se a proposição é falsa ou verdadeira e justifique com uma demonstração ou um contra-exemplo.

[6] a) Sejam u e v vetores unitários e ortogonais do $\mathbb{R}^3$. Então a matriz $A = [u\ v\ u \times v]$ é ortogonal.

[6] b) Se A e B são matrizes simétricas, então $AB + BA$ é simétrica.

[6] c) Se A, B e C forem matrizes quadradas de mesma ordem tais que $AC = BC$ então $A = B$.

[6] d) Se $A_{n\times n}$ é uma matriz quadrada, então $A = [I]^{\alpha}_{\beta}$ para algum par de bases α e β de $\mathbb{R}^n$.

Solução: a) Verdadeiro, já sabemos que o vetor $u \times v$ é perpendicular a u e a v. Além disso, $\|u \times v\| = \text{sen}(\pi/2)\, \|u\|\, \|v\| = 1$. Daí temos as seguintes relações:

$$\langle u, u\rangle = \langle v, v\rangle = \langle u \times v, u \times v\rangle = 1$$

e

$$\langle u, v\rangle = \langle u, u\times v\rangle = \langle v, u\times v\rangle = 0$$

Isto garante que $A^tA = I$.

b) Verdadeiro, pois

$$(AB+BA)^t = (AB)^t + (BA)^t = B^tA^t + A^tB^t = BA + AB = AB + BA.$$

c) Falso, considere o exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\ AB = 0 \text{ e } AC = 0.$$

d) Falso, como a matriz A pode não ser invertível, então A não pode ser o operador identidade com respeito a quaisquer bases α e β. O interessante é que se A é invertível então a afirmação é verdadeira, para ver isto basta tomar a base α formado pelos vetores colunas de A e β a base canônica.

---

3. [24pts] Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$T(x,y,z) = (x+y+z, x+2y-z, x+3y-3z, x+2y-z).$$

[4] a) Encontre uma base para $W = \mathrm{Im}(T)$ (a imagem de T).

[12] b) Seja $v = (0,0,6,2)$. Encontre $u \in W$ que esta a menor distância de v.

[8] c) Resolva o sistema $T(x,y,z) = u$.

Solução: a) Considere

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= (x+y+z, x+2y-z, x+3y-3z, x+2y-z) \\ &= x(1,1,1,1) + y(1,2,3,2) + z(1,-1,-3,-1). \end{aligned}$$

Portanto, $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Span}\{u_1 = (1,1,1,1), u_2 = (1,2,3,2), u_3 = (1,-1,-3,-1)\}$. Como queremos uma base, precisamos verificar que os vetores acima são LI. Mesmo sem terminar de responder vamos passar para o item b)

b) Para minimizar a distância precisamos de projetar ortogonalmente o vetor w sobre o subespaço W. Para fazer isso precisamos de uma base ortonormal de W. Vamos criar a base utilizando o processo de Gram-Schmidt

$$\begin{aligned} u_1' &= u_1 \\ u_2' &= u_2 - \frac{\langle u_2, u_1'\rangle}{\langle u_1', u_1'\rangle} u_1' = (1,2,3,2) - \frac{8}{4}(1,1,1,1) = (-1,0,1,0) \\ u_3' &= u_3 - \frac{\langle u_3, u_1'\rangle}{\langle u_1', u_1'\rangle} u_1' - \frac{\langle u_3, u_2'\rangle}{\langle u_2', u_2'\rangle} u_2' = (0,0,0,0). \end{aligned}$$

Disto vemos que $u_3 = 3u_1 - 2u_2$. Portanto, uma base para W é $\{u_1, u_2\}$ e uma base ortogonal é $\{(1,1,1,1), (-1,0,1,0)\}$. Portanto, o vetor u é dado por

$$u = \mathrm{Proj}_{u_1'}(w) + \mathrm{Proj}_{u_2'}(w) = (2,2,2,2) + (-3,0,3,0) = (-1,2,5,2).$$

c) Para resolver o sistema $T(x,y,z) = (-1,2,5,2)$ precisamos escalonar

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

E a solução é dada em função de z tem a seguinte forma $(-4-3z, 3+2z, z) = (-4,3,0) + z(-3,2,1)$.

---

4. [16*pts*] Calcule o determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solução: Vamos escalonar

$$\det A = (-1)\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -3 & -2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{bmatrix} = (-1)\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$
$$= (-1)^2 \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & -1 & 23 \end{bmatrix}$$

Portanto, o $\det A = 1 \times (-1) \times 1 \times 4 = -4$.

---

5. [24*pts*] Encontre a mudança de coordenadas na qual a quadrática abaixo se torna uma soma/subtração de quadrados

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 81.$$

Solução: Podemos expressar a quadrática, em termos de multiplicação de matrizes da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

Precisamos diagonalizar a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Seu polinômio característico é $\Delta_A(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ igualando a 0 encontramos as raízes $x = 1$, $x = 1$ e $x = 4$. Calculando os autovetores temos para x=1 os vetores $(-1, 0, 1)$, $(-1, 1, 0)$, para $x = 4$ o vetor $(1, 1, 1)$. Observe que os dois autovetores associados a $x = 1$ não são ortogonais. Ortogonalizando,

$$\begin{aligned} u_1 &= (-1, 0, 1) \\ u_2 &= (-1, 1, 0) - \frac{1}{2}(-1, 0, 1) = (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Normalizando obtemos a seguinte base $\beta = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \right\}$ e um vetor escrito nestas coordenadas tem entradas (x', y', z'). Então a equação toma a forma

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

e temos que nestas coordenadas a quadrática fica $x'^2 + x'^2 + 4z'^2 = 81$ que é um elipsoide.
