Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática
Gabarito da P2 de Álgebra Linear - GAN00140

16/03/2016

1. [26*pts*] Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $(x, y) \mapsto (x + 9y, -x - 5y)$. Verifique se T é diagonalizável. Caso não seja encontre uma base na qual ela toma a forma de Jordan.

   Solução: A matriz do operador T com respeito a base canônica α é

$$[T]_\alpha^\alpha = A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}.$$

   O polinômio característico é $\Delta_A(x) = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$. Portanto, o autovalor -2 esta repetido duas vezes. Observe que se tentarmos determinar o polinômio mínimo de A, $f(x) = x + 2$ não anula a matriz e, daí, $m_A(x) = \Delta_A(x)$ (o polinômio mínimo não se fatora em um produto de fatores lineares distintos). Portanto, a matriz não é diagonalizável.

   Para encontrar uma base que coloca a matriz na forma de Jordan precisamos determinar o autovalor associado a $x = -2$. Resolvendo

$$(A - (-2)I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1+2 & 9 \\ -1 & -5+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

   Vamos escolher um vetor com direção diferente de $(3, -1)$. Por exemplo $u = (1, 0)$. Considere a base $\beta = \{u, (A + 2I)u\}$, nesta base a matriz fica forma

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

   Que é a forma de Jordan da matriz.

---

2. [24*pts*] Em cada item determine se a proposição é falsa ou verdadeira e justifique com uma demonstração ou um contra-exemplo.

   [6] a) Se $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um operador linear tal que $S^2 = id$. Então seus únicos autovalores são 1 e -1.

   [6] b) Se A e B são matrizes simétricas, então AB é simétrica.

[6] c) Seja $B = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ uma base do subespaço V de $\mathbb{R}^n$. Se $w \in \mathbb{R}^n$ é ortogonal a cada vetor da base B, então $w \perp V$ (isto é, w é ortogonal a qualquer vetor de V).

[6] d) Se A é uma matriz ortogonal 4×4, então $4A$ também é uma matriz ortogonal.

Solução: a) Verdadeiro, suponha que x é um autovalor de S e v seja um de seus autovetores. Então, $S(u) = xu$, aplicando S dos dois lados da igualdade obtemos

$$u = Iu = S^2(u) = S(S(u)) = S(xu) = xS(u) = x^2u$$

por ser u não é nulo, pois ele é um autovetor, daí,

$$(x^2 - 1)u = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1.$$

b) Falso, Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Logo, $AB = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & \end{bmatrix}$.

c) Verdadeiro, considere $u \in V$, como B é uma base de W, existem escalares tais que $u = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$. Fazendo o produto interno, obtemos

$$\langle u, w \rangle = \langle a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n, w \rangle = a_1 \langle v_1, w \rangle + a_2 \langle v_2, w \rangle + \cdots + a_n \langle v_n, w \rangle = 0.$$

d) Falso, Considere $A = I_{4\times4}$. Então $A^tA = I$, isto é, A é ortogonal. Mas $4I^t4I = 16I$, que não é ortogonal.

---

3. [26*pts*] Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$T(x, y, z) = (x + 4y, y + z, x - 4z, y + z).$$

[6] a) Encontre uma base para $W = \text{Im}(T)$ (a imagem de T).

[8] b) Seja $v = (5, 0, 1, 2)$. Encontre $u \in W$ que esta a menor distância de v.

[6] c) Resolva o sistema $T(x, y, z) = u$.

[6] d) Se $v' = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Calcule $\text{Proj}_W v'$.

Solução: a) Considere

$$T(x, y, z) = (x + 4y, y + z, x - 4z, y + z) = x(1, 0, 1, 0) + y(4, 1, 0, 1) + z(0, 1, -4, 1).$$

Portanto, $\text{Im}(T) = \text{Span}\{u_1 = (1, 0, 1, 0), u_2 = (4, 1, 0, 1), u_3 = (0, 1, -4, 1)\}$. Como queremos uma base, precisamos verificar que os vetores acima são LI. Mesmo sem terminar de responder vamos passar para o item b)

b) Para minimizar a distância precisamos de projetar ortogonalmente o vetor w sobre o subespaço W. Para fazer isso precisamos de uma base ortonormal de W. Vamos criar a base utilizando o processo de Gram-Schmidt

$$\begin{aligned} u_1' &= u_1 \\ u_2' &= u_2 - \frac{\langle u_2, u_1' \rangle}{\langle u_1', u_1' \rangle} u_1' = (4, 1, 0, 1) - \tfrac{4}{2}(1, 0, 1, 0) = (2, 1, -2, 1) \\ u_3' &= u_3 - \frac{\langle u_3, u_1' \rangle}{\langle u_1', u_1' \rangle} u_1' - u_2 - \frac{\langle u_3, u_2' \rangle}{\langle u_2', u_2' \rangle} u_2' = (0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Disto vemos que u_3 combinação linear dos outros vetores. Portanto, uma base para W é $\{u_1, u_2\}$ e uma base ortogonal é $\{(1,0,1,0),(2,1,-2,1)\}$. Portanto, o vetor u é dado por

$$u = \mathrm{Proj}_{u_1'}(w) + \mathrm{Proj}_{u_2'}(w) = (3,0,3,0) + (2,1,-2,1) = (5,1,1,1).$$

c) Para resolver o sistema $T(x,y,z) = (5,1,1,1)$ precisamos escalonar

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a solução geral é $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4z \\ 1-z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. E uma solução particular pode ser $(1,1,0)$.

d) Para a projeção no caso geral, basta fazermos

$$\mathrm{Proj}_{u_1'}(v') + \mathrm{Proj}_{u_2'}(v') =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x+z \\ 0 \\ x+z \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2(t+2x+y-2z) \\ t+2x+y-2z \\ 2(-t-2x-y+2z) \\ (t+2x+y-2z) \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2t+9x+2y+z \\ t+2x+y-2z \\ -2t+x-2y+9z \\ t+2x+y-2z \end{bmatrix}.$$

---

4. [24pts] Identifique a quádrica abaixo e determine as direções de seus eixos

$$z^2 + 4xy = 1.$$

Solução: Podemos expressar a quadrática, em termos de multiplicação de matrizes da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

Precisamos diagonalizar a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seu polinômio característico é $\Delta_A(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ igualando a 0 encontramos as raízes $x = -2$, $x = 2$ e $x = 1$. Calculando os autovetores temos para x=1 o vetor $(0,0,1)$, para $x = 2$ o vetor $(1,1,0)$ e para $x = -2$ o vetor $(-1,1,0)$. Portanto, se escolhemos a base

$\beta = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), (0,0,1) \right\}$ e um vetor escrito nestas coordenadas tem entradas (x', y', z'). Então a equação toma a forma

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

e temos que nestas coordenadas a quadrática fica $2x'^2 - 2x'^2 + z'^2 = 1$ que é um paraboloide hiperbólico.
