Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática
P1 de Álgebra Linear - GAN00140

Nome(a):____

24/01/2016

1. [20*pts*] Considere os vetores $v_1 = (3, 1, -2, 1)$, $v_2 = (1, 0, -1, 1)$, $v_3 = (-2, -1, 1, 0)$ e $v_4 = (-2, 5, 7, -6)$ de $\mathbb{R}^4$.

   (a) Verifique se o vetor $u \in \text{Span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ quando: (A) $u = (2, 3, 2, 1)$, (B) $u = (3, 2, -1, 5)$.

   (b) Considere a matriz A onde as linhas são os vetores v_1, v_2, v_3 e v_4. Calcule $\det(A)$.

2. [20*pts*] Em cada item determine se a proposição é falsa ou verdadeira e justifique com uma demonstração ou um contra-exemplo.

   [05] a) O conjunto S dos vetores (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tais que $xy = 0$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

   [05] b) Se $V = \text{Span}\{v_1, v_2\}$, e nem v_1 nem v_2 são o vetor nulo, então $\{v_1, v_2\}$ é uma base de V.

   [05] c) Os polinômios $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x - 1$ e $p_3(x) = x(x - 1)$ são vetores linearmente independente no espaço de todos os polinômios de grau menor ou igual a 2.

   [05] d) Se A é uma matriz 5×2 não identicamente nula, então o posto de A é 2, 3, 4 ou 5.

3. [20*pts*] Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ e suponha que $\det(A) = 5$. Calcule:

   a) $\det(3A)$ b) $\det(A^{-1})$ c) $\det(2A^{-1})$

   d) $\det((2A)^{-1})$ e) $\det \begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}$

4. [16*pts*] Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z, t) = (x - y, x - 2y + z, y - z)$$

   [04] a) Determine a matriz A que representa a transformação T, com respeito às bases canônicas.

   [08] b) Encontre bases para o espaço-linha de A e para o núcleo de T.

   [04] c) Encontre uma base para a imagem de T.

5. [24*pts*] Sejam $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (2, 3)$ e seja

$$A = [T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

   a matriz de $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ na base $\alpha = \{v_1, v_2\}$.

   [06] (a) Se $B \in M(n, \mathbb{R})$ definimos $N(B) = \{v \in \mathbb{R}^n : Bv = 0\}$. Calcule $N(A)$.

   [12] (b) Encontre a fórmula de T, ou a matriz de T na base canônica do $\mathbb{R}^2$.

   [08] (c) Os vetores de $u \in N(A)$, determinados no item (a) satisfazem $T(u) = 0$?