Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática
P1 de Álgebra Linear - GAN00140

Nome(a):____

24/01/2016

1. [20*pts*] Considere os vetores $v_1 = (3, 1, -2, 1)$, $v_2 = (1, 0, -1, 1)$, $v_3 = (-2, -1, 1, 0)$ e $v_4 = (-2, 5, 7, -6)$ de $\mathbb{R}^4$.

   (a) Verifique se o vetor $u \in \text{Span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ quando: (A) $u = (2, 3, 2, 1)$, (B) $u = (3, 2, -1, 5)$.

   (b) Considere a matriz A onde as linhas são os vetores v_1, v_2, v_3 e v_4. Calcule $\det(A)$.

   Solução: É Preciso verificar que $u \in \text{Span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e calcular o determinante. Vamos tomar cuidado para fazer apenas uma vezes o escalonamento. Digamos que $u = (a, b, c, d)$ e queremos verificar se existem $x, y, z, t \in \mathbb{R}$, tais que $xv_1 + yv_2 + zv_3 + tv_4 = u$. Ao expandir e extrair a matriz do sistema obtemos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & -2 & a \\ 1 & 0 & -1 & 5 & b \\ -2 & -1 & 1 & 7 & c \\ 1 & 1 & 0 & -6 & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 & b \\ 3 & 1 & -2 & -2 & a \\ -2 & -1 & 1 & 7 & c \\ 1 & 1 & 0 & -6 & d \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 & b \\ 0 & 1 & 1 & -17 & a-3b \\ 0 & -1 & -1 & 17 & 2b+c \\ 0 & 1 & 1 & -11 & d-b \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 & b \\ 0 & 1 & 1 & -11 & d-b \\ 0 & 0 & 0 & 6 & b+c+d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-b+c \end{bmatrix}$$

   Portanto, o sistema tem solução se, e somente se, $a-b+c = 0$, portanto, $(2, 3, 2, 1) \notin \text{Span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $(3, 2, -1, 5) \in \text{Span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Para calcular o valor do determinante considere uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4$ definida por $T(x, y, z, t) = xv_1 + yv_2 + zv_3 + tv_4$. Sabemos que T não é sobrejetora e pelo teorema do posto não é injetora. Portanto, T é singular. Logo det da matriz de T é $= 0$ assim como det da matriz transposta de T, que é exatamente a matriz onde as linhas são os vetores v_1, v_2, v_3 e v_4, isto é, $\det(A) = 0$.

---

2. [20*pts*] Em cada item determine se a proposição é falsa ou verdadeira e justifique com uma demonstração ou um contra-exemplo.

   [05] a) O conjunto S dos vetores (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tais que $xy = 0$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

   [05] b) Se $V = \text{Span}\{v_1, v_2\}$, e nem v_1 nem v_2 são o vetor nulo, então $\{v_1, v_2\}$ é uma base de V.

[05] c) Os polinômios $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x - 1$ e $p_3(x) = x(x-1)$ são vetores linearmente independente no espaço de todos os polinômios de grau menor ou igual a 2.

[05] d) Se A é uma matriz 5×2 não identicamente nula, então o posto de A é 2, 3, 4 ou 5.

Solução: a) Falso, pois $(1,0)$ e $(0,1) \in S$, mas $(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin S$.

b) Falso, se considerarmos $v_1 = (1,0)$ e $v_2 = (1,0)$, logo v_1 nem v_2 são vetores nulos. Mas $\{v_1, v_2\}$ não é uma base, uma vez que não é um conjunto LI.

c) Verdadeira. Suponha $ap_1 + bp_2 + cp_3 = 0$. Então $ax + b(x-1) + cx(x-1) = 0$ para todo x real. Tomando $x = 0$, vem $b = 0$ Tomando $x = 1$, vem $a = 0$. Enfim, tomando $x = 2$, vem $2a + b + 2c = 0$, então $c = 0$. Assim, a única solução é a trivial, e eles são L.I.

d) Falso, considere a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que tem posto 1.

---

3. [20pts] Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ e suponha que $\det(A) = 5$. Calcule:

a) $\det(3A)$ b) $\det(A^{-1})$ c) $\det(2A^{-1})$

d) $\det((2A)^{-1})$ e) $\det \begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}$

Solução: a) Sabemos que se multiplicarmos uma coluna de uma matriz D por k obtemos uma matriz E. E $3 \det D = \det E$. Se multiplicarmos as 3 colunas por 3, obtemos que $\det(3A) = 3^3 \det(A) = 27 \times 5$.

b) Sabemos que no caso de A ter inverso, e no caso tem pois $\det(A) = 5$, então $\det(AA^{-1}) = \det(I) \Rightarrow det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{5}$.

c) Usando os a) e b) $\det(2A^{-1}) = \frac{2^3}{5}$.

d) $\det((2A)^{-1}) = \frac{1}{2^3 \det(A)} = \frac{1}{40}$.

e) Observe que

$$\begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{bmatrix} \text{ permutando linha 2 com a 3 } \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

logo $\det \begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix} = -5.$

---

4. [16*pts*] Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z, t) = (x - y, x - 2y + z, y - z)$$

[04] a) Determine a matriz A que representa a transformação T, com respeito às bases canônicas.

[08] b) Encontre bases para o espaço-linha de A e para o núcleo de T.

[04] c) Encontre uma base para a imagem de T.

Solução: a) Como queremos determinar a matriz de T com respeito as duas bases canônicas, não é preciso fazer quase nada a não ser ler os coeficientes e obter

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Escalonando a matriz A do item a) obtemos

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim uma possível base para os espaço-linha é $\{(1, 0, -1, 0), (0, -1, 1, 0)\}$. Para obter $N(A)$ o escalonamento deveria ser exatamente o mesmo! logo, $x - z = 0$ e $-y + z = 0$, isto é, $x = y = z$ e t livre.

$$(x, y, z, t) = (x, x, x, t) = x(1, 1, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1).$$

Portanto, uma base para $N(A)$ seria $\{(1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$, uma vez que claramente estes vetores são LI.

c) Observe que

$$(x - y, x - 2y + z, y - z) = x(1, 1, 0) + y(-1, -2, 1) + z(0, 1, 1) + t(0, 0, 0).$$

Pelo teorema do Posto $4 = \dim \mathbb{R}^4 = \dim \mathrm{N}(T) + \dim \mathrm{IM}(T) = 2 + \dim \mathrm{IM}(T) \Rightarrow \dim \mathrm{IM}(T) = 2$. Então destes 3 vetores basta tomarmos 2 LI. Veja que

$$a(1, 1, 0) + b(0, 1, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow a = 0,\ b = 0.$$

Daí, uma possível base para a imagem é $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.

---

5. [24*pts*] Sejam $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (2, 3)$ e seja

$$A = [T]^{\alpha}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

a matriz de $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ na base $\alpha = \{v_1, v_2\}$.

[06] (a) Se $B \in M(n, \mathbb{R})$ definimos $N(B) = \{v \in \mathbb{R}^n : Bv = 0\}$. Calcule $N(A)$.

[12] (b) Encontre a fórmula de T, ou a matriz de T na base canônica do $\mathbb{R}^2$.

[08] (c) Os vetores de $u \in N(A)$, determinados no item (a) satisfazem $T(u) = 0$?

Solução: a) escalonando A temos

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, $\mathrm{N}(A) = \mathrm{Span}\,\{(3,-1)\}$.

b) Digamos que β é a base canônica do $\mathbb{R}^2$. Então,

$$[I]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow [I]^{\beta}_{\alpha} = \left([I]^{\alpha}_{\beta}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

E calculando

$$[T]^{\beta}_{\beta} = [I]^{\alpha}_{\beta}\,[T]^{\alpha}_{\alpha}\,[I]^{\beta}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $T(x, y) = (y, 0)$.

c) Sim, pois o núcleo de $N(T)$ são gerados pelo múltiplos do vetor $(3,-1)$ que quando calculado na base canônica fica $3(1,1) + (-1)(2,3) = (1,0)$ e $T(1,0) = (0,0)$.
