Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática e Estatística – IME
Professor: Jones Colombo

Gabarito da VR de Álgebra Linear II

10/01/2017

1. $[2,0pts]$ Analise o seguinte argumento segundo o qual toda matriz anti simétrica tem determinante igual a zero.

   Sabemos que $A^t = -A$, logo $\det A = \det A^t = \det -A = -\det A$, logo $\det A = 0$.

   Calcule $\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ - o que pode estar errado?

   Solução: É fácil de observar que se $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, então $A^t = -A$ e que $\det A = 1$. O que em princípio teríamos uma contradição com o argumento acima. Entretanto, há um erro no argumento, na passagem:

   $$\det(-A) = -\det A$$

   Suponha que n e a quantidade de colunas e veja que $\det(-A) = \det((-1)A)$, então o escalar -1, multiplica cada uma das n colunas por -1, então como o determinante é n-linear nas colunas, temos que o correto seria

   $$\det(-A) = (-1)^n \det A.$$

   Portanto, só podemos concluir que: se n for ímpar então $\det A = 0$.

---

2. $[3,0pts]$ Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por

   $$T(x,y,z) = (x+y+z, x+2y-z, x-3y+9z, x-4y+11z).$$

   a) [0,6] Encontre uma base para $W = \mathrm{Im}(T)$ (a imagem de T).

   b) [1,2] Seja $v = (-5, 17, -1, -3)$. Encontre $u \in W$ que esta a menor distância de v.

   c) [0,6] Resolva o sistema $T(x,y,z) = u$.

   d) [0,6] Se $v' = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. Calcule $\mathrm{Proj}_W v'$.

   Solução: Pelo desenvolvimento da teoria existem duas formas de fazermos esta questão. Vamos iniciar utilizando a matriz de projeção M.

a) Considere as bases canônicas $\alpha \subset \mathbb{R}^3$ e $\beta \subset \mathbb{R}^4$, então a matriz

$$[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 9 \\ 1 & -4 & 11 \end{bmatrix}$$

Escalonando por colunas, visto que são as colunas da matriz que geram a $\mathrm{Im}(T)$, descobrimos que $c_3 = 3c_1 - 2c_2$. Portanto, a terceira coluna é combinação das outras duas e pode ser descartada. $\gamma = \{(1,1,1,1),(1,2,-3,-4)\}$ é uma base de W.

b) Considere

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

e calculando obtemos

$$M^t M = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 30 \end{bmatrix} \Rightarrow M\left(M^t M\right)^{-1} M^t = \frac{1}{52}\begin{bmatrix} 21 & 25 & 5 & 1 \\ 25 & 31 & 1 & -5 \\ 5 & 1 & 21 & 25 \\ 1 & -5 & 25 & 31 \end{bmatrix}$$

fazendo $M\left(M^t M\right)^{-1} M^t(-5,17,-1,-3)^t = (6,8,-2,-4)^t$. Portanto, $u = \mathrm{Proj}_W(v) = (6,8,-2,-4)$.

c) Observe que $\dim \mathrm{Im}(T) = 2$, pelo teorema do núcleo e da Imagem, $\dim(T) = 1$. Portanto, ao resolver $T(x,y,z) = u$ sempre encontraremos infinitas soluções, e o grau de liberdade das soluções é 1. É fácil de ver que $(x,y,z) = (-4,-2,0)$ é uma solução para o sistema. Uma questão interessante seria descobri aquela solução que esta mais próximo do (T) e desta forma impor uma condição para unicidade da solução.

d) Para resolver este item basta

$$M\left(M^t M\right)^{-1} M^t v' = \frac{1}{52}\begin{bmatrix} 21 & 25 & 5 & 1 \\ 25 & 31 & 1 & -5 \\ 5 & 1 & 21 & 25 \\ 1 & -5 & 25 & 31 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{52}\begin{bmatrix} 21x + 25y + 5z + t \\ 25x + 31y + z - 5t \\ 5x + y + 21z + 25t \\ x - 5y + 25z + 31t \end{bmatrix}.$$

A outra maneira de fazer esta questão é utilizando os operadores de projeção Proj. Ao invés de fazer o item a) comece pelo item b)

b) Considere $\{u_1 = (1,1,1,1), u_2 = (1,2,-3,-4), u_3 = (1,-1,9,11)\}$ e aplique o procedimento de ortogonalização de Gram-Schmidt obtemos

$$\begin{aligned}
v_1 &= u_1 \\
v_2 &= u_2 - \mathrm{Proj}_{v_1} u_2 = (1,2,-3,-4) - (-1)(1,1,1,1) = (2,3,-2,-3) \\
v_3 &= u_3 - \mathrm{Proj}_{v_1} u_3 - \mathrm{Proj}_{v_2} u_3 \\
&= (1,-1,9,11) - (5)(1,1,1,1) - (-2)(2,3,-2,-3) = (0,0,0,0).
\end{aligned}$$

Portanto, v_3 é combinação linear de v_1, v_2 e daí, u_3 é combinação linear de u_1, u_2. No item a) uma base para W pode ser $\{u_1, u_2\}$. Continuando o item b) temos

$$\begin{aligned}\text{Proj}_W(v) &= \text{Proj}_{v_1}(-5, 17, -1, -3) + \text{Proj}_{v_2}(-5, 17, -1, -3)\\ &= (2, 2, 2, 2) + (4, 6, -4, -6) = (6, 8, -2, -4).\end{aligned}$$

O item c) se resolve da mesma forma.

Já o item d)

$$\begin{aligned}\text{Proj}_W(v) &= \text{Proj}_{v_1}(x, y, z, t) + \text{Proj}_{v_2}(x, y, z, t)\\ &= \frac{1}{52}(21x + 25y + 5z + t,\\ &\qquad 25x + 31y + z - 5t, 5x + y + 21z + 25t, x - 5y + 25z + 31t).\end{aligned}$$

---

3. $[1,5pts]$ Sejam A e B duas matrizes semelhantes e $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ é um polinômio não nulo. Prove que a matriz $p(A)$ é semelhante a matriz $p(B)$.

   Solução: Sabemos que A e B são semelhantes, isto é, existe uma matriz P invertível tal que $B = P^{-1}AP$. Disso segue que $B^n = P^{-1}A^nP$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Se $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, então

$$\begin{aligned}P(B) &= a_0I + a_1B + \cdots + a_nB^n\\ &= a_0P^{-1}IP + a_1P^{-1}AP + \cdots + a_nP^{-1}A^nP\\ &= P^{-1}\left(a_0IP + a_1AP + \cdots + a_nA^nP\right)\\ &= P^{-1}\left(a_0I + a_1A + \cdots + a_nA^n\right)P\end{aligned}$$

   Portanto, $p(b) = P^{-1}p(A)P$.

---

4. $[2,0pts]$ Identifique a quádrica abaixo e determine as direções de seus eixos

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - \sqrt{2}x = 0.$$

   Solução: Reescrevendo a equação obtemos

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1\\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

   Precisamos diagonalizar o operador $A = \begin{bmatrix} 3 & 1\\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. O polinômio característico é $\Delta_A(x) = x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$. Para $\lambda = 2$ temos o autovetor $(1, -1)$ e para $\lambda = 4$ temos o autovetor $(1, 1)$. Escolhendo a base $\beta = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)\right\}$ e considere $\alpha \subset \mathbb{R}^2$ a base canônica do $\mathbb{R}^2$. Então

$$P^{-1} = [I]^{\beta}_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1\\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow P = P^t = P^{-1}, \text{ daí }, \begin{bmatrix} x'\\ y' \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x\\ y \end{bmatrix}.$$

   Fazendo esta mudança de coordenadas e voltando para a equação temos

$$4x'^2 + 2y'^2 - x' - y' = 0$$

Portanto, depois de completar quadrados obtemos

$$4(x' - \frac{1}{8})^2 + 2(y' - \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16} - \frac{2}{16} = 0$$
$$\Rightarrow 4(x' - \frac{1}{8})^2 + 2(y' - \frac{1}{4})^2 = \frac{3}{16}$$

O ponto $B' = (\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$ na coordenadas (x', y') correspondem ao ponto $B = (\frac{3}{8\sqrt{2}}, -\frac{1}{8\sqrt{2}})$ no sistema (x, y). portanto, obtemos uma Elipse no ponto B. E os eixos principais as direções $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$.

---

5. $[1, 5pts]$ Sejam $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$ e $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ dois conjuntos ortonormais do $\mathbb{R}^3$. Prove que a matriz $A = [I]^{\alpha}_{\beta}$ é uma matriz ortogonal.

Solução: Para obtermos os coeficientes a_{ij} da matriz A, precisamos escrever

$$u_i = a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + a_{i3}v_3 = \sum_{r=1}^{3} a_{ir}v_r, \text{ com } i = 1, 2, 3.$$

Com $A = [a_{ij}]$, precisamos calcular A^tA. O coeficiente de A^tA na linha l e coluna k são da forma

$$\sum_{r=1}^{3} a_{lr}a_{kr}.$$

Mas veja que:

$$\begin{aligned}
\delta_{lk} = \langle u_l, u_k \rangle &= \left\langle \sum_{r=1}^{3} a_{lr}v_r, \sum_{s=1}^{3} a_{ks}v_s \right\rangle \\
&= \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} a_{lr}a_{ks} \langle v_r, v_s \rangle \\
&= \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} a_{lr}a_{ks}\delta_{rs} \\
&= \sum_{r=1}^{3} a_{lr}a_{kr}
\end{aligned}$$

O que mostra que $A^tA = I$.
