Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática
Gabarito da P1 de Álgebra Linear II

27/10/2016

1. [$2,0pts$] Sejam A e B duas matrizes semelhantes. Prove que o polinômio minimo $m_A(x)$ de A é igual ao polinômio mínimo $m_B(x)$ de B.

   Solução: Como A e B são semelhantes, então existe uma matriz P invertível tal que $B = P^{-1}AP$. digamos que: $m_B(x) = x^s + b_{s-1}x^{s-1} + \cdots + b_1x + b_0$ que $m_A(x) = x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \cdots + a_1x + a_0$.

   Agora pela minimalidade de m_B temos

$$\begin{aligned} 0 = m_B(B) &= B^s + b_{s-1}B^{s-1} + \cdots + b_1B + b_0I \\ &= \left(P^{-1}AP\right)^s + b_{s-1}\left(P^{-1}AP\right)^{s-1} + \cdots + b_1P^{-1}AP + b_0P^{-1}P \\ &= P^{-1}A^2P + b_{s-1}P^{-1}A^{s-1}P + \cdots + b_1P^{-1}AP + b_0P^{-1}IP \\ &= P^{-1}\left(A^2P + b_{s-1}A^{s-1}P + \cdots + b_1AP + b_0IP\right) \\ &= P^{-1}\left(A^2 + b_{s-1}A^{s-1} + \cdots + b_1A + b_0I\right)P \end{aligned}$$

   De onde concluímos que $m_B(A) = 0$ e daí $m_A(x)$ divide $m_B(x)$. Usando que $B = P^{-1}AP \iff P^{-1}BP = A$ com um raciocínio muito próximo podemos verificar que $m_A(B)$, e daí $m_B(x)$ divide $m_A(x)$. Como ambos são polinômios mônicos concluímos que ambos são iguais.

---

2. [$1,5pts$] Calcule, por escalonamento, o determinante da seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Solução: Vamos escalonar

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 12 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 108 & 23 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix}.$$

   Portanto, $\det(A) = 39$.

---

3. $[2,0pts]$ Encontre o determinante sabendo que A é uma matriz 4×4 sabendo $\det(A) = -2$:

(a) $\det(-A)$, **(b)** $\det((2A)^{-1})$, **(c)** $\det(2A^t)$ e **(d)** $\det(A^3)$.

Solução: a) $\det(-A) = (-1)^4(-2)$

b)

$$\det((2A)^{-1}) = \frac{1}{\det(2A)} = \frac{1}{2^4 \det(A)} = \frac{1}{2^4 \times (-2)}$$

c) $\det(2A^t) = 2^4 \det(A^t) = 2^4 \det(A) = 2^4 \times (-2)$.

d) $\det(A^3) = \det(A)\det(A)\det(A) = (-2)^3$.

---

4. $[3,0pts]$ Seja $T : V \to V$ um operador linear definido pela matriz abaixo com respeito a base canônica $\mathcal{C}$

$$A = \begin{bmatrix} -11 & -8 & -14 \\ 3 & 0 & 5 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Faça o seguinte:

(a) Calcule o polinômio característico;

(b) Encontre os autovalores;

(c) Obtenha o polinômio mínimo;

(d) Decida se o operador é diagonalizável ou não (justifique);

(e) Se for diagonalizável obtenha a matriz P tal que $D = P^{-1}AP$ é diagonal. Caso não seja diagonalizável obtenha a forma de Jordan do operador.

(f) Determine uma base na qual a matriz fique na forma de Jordan.

(g) Escreva o operador $T = D + N$, onde D é um operador diagonalizável e N é um operador nilpotente.

Solução: a) $\Delta_A(x) = x^3 + 3x^2 - 3 = (x+2)^2(x-1)$.

b) os autovalores são -2 e 1.

c) Como

$$(A+2I)(A-I) = \begin{bmatrix} -9 & -8 & -14 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 & -8 & -14 \\ 3 & -1 & 5 \\ 6 & 4 & 7 \end{bmatrix} \neq 0.$$

segue que $m_A(x) = \Delta_A(x)$.

d) Este operador não é diagonalizável, uma vez que seu polinômio característico tem raízes repetidas.

e) Já sabemos que esta matriz tem um bloco de Jordan de tamanho 2 associado ao autovalor -2 e um bloco de Jordan de tamanho 1 associado ao autovalor 1. Logo a forma de Jordan é

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

f) Vamos começar calculando uma base para o auto espaço generalizado associado a -2

$$\mathcal{N}(A+2I)^2 = \begin{bmatrix} -27 & 0 & -54 \\ 9 & 0 & 18 \\ 18 & 0 & 36 \end{bmatrix}$$

é gerado por $(-2,0,1)^t, (0,1,0)^t$. Considere a base $\alpha = \{(-2,0,1)^t, (0,1,0)^t, (-3,1,2)^t\}$ o terceiro vetor foi obtido por calcular uma base para $\mathcal{N}(A-I)$. Logo

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Considere o operador que na base canônica do $\mathbb{R}^2$ tem matriz $B = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Observe que $(1,0)^t \notin \mathcal{N}(B-2I)$. Portanto, basta tomarmos a base $\{(B+2I)(1,0)^t, (1,0)^t\} = \{(-2,-1)^t, (1,0)^t\}$ e portanto, a base que estamos buscando é

$$\beta = \left\{ (-2)\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Nesta base $[T]_\beta^\beta$ fica na forma de Jordan descrita no item e).

g) (teorema da decomposição primária)

$$f(x) = \frac{m_A(x)}{(x+2)^2} = x - 1 \text{ e } g(x) = \frac{m_A(x)}{x-1} = (x+2)^2$$

Escrevendo

$$\text{MDC}\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{9}(5-x)(x-1) + \frac{1}{9}(x-2)^2 = 1$$

Então

$$P_1 = \frac{1}{9}(5I - A)(A - I) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}, P_2 = \frac{1}{9}(A-2I)^2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Daí,

$$D = -2P1 + P2 = \begin{bmatrix} -11 & 0 & -18 \\ 3 & -2 & 6 \\ 6 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

e

$$N = A - D = \begin{bmatrix} 0 & -8 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

5. $[1,5pts]$ Encontre todas as possíveis formas de Jordan das matrizes cujos polinômios característicos $\Delta(x)$ e mínimo $m(x)$ são:

   (a) $\Delta(x) = (x-3)^5$ e $m(x) = (x-3)^2$;

   (b) $\Delta(x) = (x-1)^4(x+2)^2$ e $m(x) = (x-1)^2(x+2)$.

   Solução: (a) como $m(x)$ é de grau 2 sabemos que deve existir pelo menos um bloco 2×2. Como $\Delta(x)$ tem grau 5 vemos que podemos construir as seguintes matrizes

$$\mathrm{DIAG}\left\{\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, -3\right\} \text{ e } \mathrm{DIAG}\left\{\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, -3, -3, -3\right\}$$

   (b)

$$\mathrm{DIAG}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, 1, 1, -2, -2\right\} \text{ e } \mathrm{DIAG}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, -2, -2\right\}$$
