Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática e Estatística – IME
Professor: Jones Colombo

2^a Prova de Álgebra Linear II

Nome(a):____

05/01/2017

1. $[2,0pts]$ Se $\alpha = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é um conjunto ortogonal, prove que:

   a) α é LI.

   b) $|u_1 + u_2 + \cdots + u_n|^2 = |u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2$.

2. $[3,0pts]$ Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$T(x,y,z) = (x+y+z, x+y+z, x+2y-z, x+4y-5z).$$

   a) [0,6] Encontre uma base para $W = \text{Im}(T)$ (a imagem de T).

   b) [1,2] Seja $v = (19, -3, -6, 2)$. Encontre $u \in W$ que esta a menor distância de v.

   c) [0,6] Resolva o sistema $T(x,y,z) = u$.

   d) [0,6] Se $v' = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. Calcule $\text{Proj}_W v'$.

3. $[1,5pts]$ Verifique se o operador $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definido por $T(z,w) = (z+iw, z+(2+i)w)$ é um operador normal ($A^*A = AA^*$).

4. $[2,0pts]$ Identifique a quádrica abaixo e determine as direções de seus eixos

$$3x^2 - 4\sqrt{3}xy - y^2 + 20y - 25 = 0.$$

5. $[1,5pts]$ Sejam E um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle , \rangle$ e considere o operador linear projeção ortogonal $\text{Proj}_u : E \to E$ sobre um vetor não nulo u. Se $H_u : E \to E$ é dado por $H_u(v) = (I - 2\,\text{Proj}_u)v$. Mostre que:

   a) $H_u^2 = I$.

   b) Se v e w são vetores distintos de mesmo comprimento, então $H_{v-w}(v) = w$.

Boa Prova!